ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО»
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

МЕЛЕШКО АЛЕКСАНДР ГЕННАДИЕВИЧ

ВЛИЯНИЕ СИЛЬНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМ

01.04.07 – «Физика конденсированного состояния»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Фридман Юрий Анатольевич
доктор физико-математических наук,
профессор

Симферополь
2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Явление магнетизма, одно из древнейших явлений известное человечеству, всегда привлекало внимание исследователей своей обширной областью применения [1]. И до сих пор, исследования в области магнитных явлений остается актуальной отраслью науки и техники. Такое повышенное внимание к явлению магнетизма заключается в том, что с развитием современных технологий возникает потребность в создании новых материалов с уникальными физическими свойствами, определяемыми квантовыми эффектами. К подобным материалам можно отнести, например, молекулярные магнетики, спиновые цепочки, сплавы Гейслера, нанотрубки, мезоскопические магнитные структуры и так далее. Подобные материалы используются повсеместно в таких важных областях человеческой деятельности, как информационные технологии, навигация, медицина, энергетика, машиностроение, оборонная промышленность. Необходимо также отметить, что магнитные явления имеют квантовую природу. Поэтому исследования в области физики магнитных явлений носят не только прикладной характер, но и фундаментальный, позволяя лучше понять квантовую теорию.

В последнее время в связи с развитием нанотехнологий появилась возможность создавать различные магнитные структуры с заранее заданными свойствами, что послужило новым толчком для исследований, а также практического применения магнетизма [2]. При этом важно понимать, что магнитные наносистемы можно одновременно считать как микро-, так и макрообъектами, поскольку обладают свойствами обоих. В результате чего исследования таких систем перспективны не только с точки зрения прикладной науки, но и с точки зрения фундаментальной физики. Последнее обстоятельство объясняется тем, что экспериментальные данные возникающие при исследованиях всевозможных магнитных структур требуют теоретических обоснований, которые и вносят вклад как в теорию магнетизма, так и в целом в физику.

Среди всего многообразия магнитных структур, наиболее перспективными являются ультратонкие магнитные пленки в силу их практической значимости. Такие магнитные пленки обладают рядом уникальных физических свойств, что способствует их повсеместному применению в технике, и, как следствие, являются предметом интенсивных исследований. Более того, в конце 80-х и начале 90-х годов XX века технологии достигли того уровня, что появилась возможность создавать не только ультратонкие пленки, которые имеют в толщину несколько атомных слоев, но даже одноатомные пленки с толщиной в один атомный слой. Особый интерес к подобным магнитным структурам поясняется тем, что они близки по свойствам к двумерным объектам [3-7]. В результате чего ультратонкие и одноатомные магнитные пленки стали объектом исследований, как теоретических [8-17], так и экспериментальных [3-8, 18-22]. Как уже было сказано, повышенный интерес к данным объектам заключается в их практической ценности. Так, например, магнитные пленки нашли применение в компьютерной технике, при производстве лазеров и сенсоров и т.д. [23, 24]. Однако необходимо отметить еще один аспект, связанный с актуальностью исследований ультратонких магнитных пленок. Двумерные магнитные пленки являются объектом для изучения многих фундаментальных проблем теории магнетизма. В частности, вопросы о существовании магнитного монополя [25-27], о возможности реализации магнитного упорядочения в двумерных изотропных и анизотропных магнитных системах [28,29], о возникновении и условиях реализации новых фазовых состояний, являющимися аналогами состояний, обнаруженных в Бозе-газе [30-32] остаются актуальными по сей день.

Современные магнитные материалы обладают множеством различных свойств, определяющимися влиянием квантовых эффектов. Так, например, при микроскопическом описании магнитных диэлектриков в спиновом гамильтониане могут возникать слагаемые вида $S_n^i \beta_{ij} S_n^j$, характеризующие энергию одноионной анизотропии (S_n^i – i-ая компонента спинового оператора на узле n, β_{ij} – компоненты тензора одноионной анизотропии). Существование в магнитной системе одноионной анизотропии обуславливается влиянием спин-орбитального взаимодействия [33]. Подобные слагаемые можно также выделить из энергии магнитодипольного взаимодействия. Однако, несмотря на то, что магнитодипольное взаимодействие является определяющим фактором в формировании доменной структуры, его энергия существенно меньше энергии одноионной анизотропии [34].

Простейшей магнитной системой, в которой возникает одноионная анизотропия, является магнитный диэлектрик, у котором значение спина магнитного иона равно единице ($S=1$). Как правило, тензор одноинной анизотропии имеет диагональный вид, такой, что $\beta_{xx}=\beta_{yy}\neq\beta_{zz}$, $\beta_{ij}=0$ где $i\neq j$. Подобный вид компонент тензора одноионной анизотропии описывает возникающую в магнетике одноосную одноионную анизотропию. Такая модель достаточно хорошо описывает поведение многих анизотропных магнитных систем. Однако при создании магнитоупорядоченных систем имеет место ряд факторов, приводящих к нарушению диагональности тензора одноионной анизотропии. К таким факторам можно отнести, например, нарушение химического состава магнетика, или рассогласование магнитной подсистемы и подсистемы подложки и другие. При этом исследование подобных отклонений в формировании свойств системы является важным, поскольку имеет практическую ценность. Несмотря на то, что, как было упомянуто выше, технологии производства магнитных пленок достигли существенного прогресса в последние 20 лет, создание идеальных магнитных пленок с одноосной анизотропией по-прежнему остается сложной технологической задачей. В результате чего наличие различных дефектов пленки, либо ее рассогласование с подложкой приводит к нарушению диагональности тензора одноионной анизотропии. Таким образом, исследование магнетиков со сложной одноионной анизотропией является актуальной на сегодняшний день задачей: поскольку невозможно гарантировать отсутствие дефектов пленки при производстве, есть смысл определить влияние данной особенности на поведение анизотропных магнетиков.

С учетом вышесказанного, для построения более реалистичной модели анизотропной магнитной пленки необходимо ввести в рассмотрение недиагональные компоненты тензора одноионной анизотропии ($\beta_{zx} = \beta_{xz} \neq 0$). Если ввести связанную с магнитным ионом систему координат, такую что плоскость XOY совпадает с базисной плоскостью пленки, то указанный выше вид тензора одноионной анизотропии описывает анизотропию типа легкая ось [35], у которой ось легкого намагничения лежит в плоскости ZOX под углом φ к оси OZ. Таким образом, действие данной магнитной анизотропии приводит к тому, что вектор намагниченности будет ориентироваться в плоскости ZOX под некоторым углом φ к оси квантования. Поэтому, для простоты будем называть в дальнейшем описанную легкоосную анизотропию наклонной.

Исследование систем с наклонной одноионной анизотропией является интересной задачей, что обусловлено большим разнообразием фазовых состояний и физических свойств, в отличие от одноосных магнетиков, обладающих лишь анизотропией типа легкая плоскость либо легкая ось [36-38]. В качестве примера имеет место рассмотреть тонкую ферромагнитную пленку $(BiLuCa)_3(FeGe)_5O_{12}$, в которой наблюдается каскад фазовых переходов [37], то есть при изменении внешнего магнитного поля реализуется несколько различных фазовых состояний. Более того, системы с наклонной одноионной анизотропией достаточно точно описывают энергию разориентированных пленок феррит-гранатов, а также поведение наногранулярных пленок с легкоосной анизотропией. Так в работе [39] для двухпараметрической модели показано, что в (111) разориентированных пленках возникает наклонная анизотропия, у которой ось легкого намагничения лежит в одной плоскости с углом разориентации, в частности в плоскости $(\bar{1}10)$ [39]. В работе [37] были исследованы процессы перемагничивания в (112) пленках, являющихся частным случаем (111) разориентированных пленок, и было показано, что во внешнем магнитном поле, ориентированном в плоскости $(\bar{1}10)$, вектор намагниченности также будет ориентирован в этой плоскости. Следовательно, при введении координат X и Z в плоскости $(\bar{1}10)$, легко показать, что энергия анизотропии будет характеризоваться двумя константами: β_{zz} и β_{zx} [37, 38]. Таким образом, в системе реализуется двухосевая анизотропия. При этом такая двухосевая анизотропия оказывает существенное влияние как на спектры элементарных возбуждений [38], так и на процессы перемагничивания и тип доменной структуры [36].

В действительности, магнитоупорядоченные системы с наклонной анизотропией являются перспективными материалами при создании устройств для визуализации сложных неоднородных магнитных полей, устройств дефектоскопии, а также для исследования магнитных наноструктурных материалов [37, 40, 41]. Более того, магнитные пленки с легкоосной анизотропией имеют большой практический и научный интерес, поскольку они используются в магнитооптических устройствах обработки информации как материалы с высокой плотностью записи информации [42-45]. Таким образом, интересным было бы рассмотреть случай, когда магнитная пленка имеет настолько сильный дефект, что возникающая в ней наклонная анизотропия становится одним из основных видов взаимодействия. Такая ситуация вполне реализуема, поскольку существует достаточно большое количество магнитоупорядоченных систем, у которых энергия одноионной анизотропии сравнима с энергией обменного взаимодействия, или даже превышает ее. Так, например, в системе с большой легкоплоскостной анизотропией наблюдается ряд квантовых эффектов, не поддающихся описанию в рамках феноменологических моделей [46-52]. Причем в работах [46, 53-60] показано, что наиболее сильно эти эффекты проявляются при конкуренции различных типов взаимодействий в системе. В частности, выделим среди этих эффектов квантовое сокращение спина, возникающее благодаря конкуренции между обменным взаимодействием и легкоплоскостной анизотропией [46, 50, 51, 53, 61, 62]. При этом в предельном случае, когда энергия одноионной анизотропии больше чем энергия обменного взаимодействия, реализуется, так называемая, квадрупольная фаза, характеризуемая существованием дальнего магнитного порядка тензорного, а не векторного, типа [56, 57, 61, 62, 63-65].

Как уже было указано выше, перспективные на сегодняшний день ультратонкие магнитные пленки, которые можно считать двумерными, являются исключительно квантовыми объектами. В результате их свойства очень сильно отличаются от свойств объемных магнетиков. Одно из наиболее важных отличий двумерных изотропных пленок заключается в отсутствии дальнего магнитного порядка при любой конечной температуре [28, 66-68], что можно интерпретировать как наличие солитонов конечной энергии, плотность которых также конечна (солитоны Белавина-Полякова [69]), существующих в изотропных магнетиках. Однако в легкоплоскостных магнетиках такие солитоны не существуют, но могут возникать вихри, с логарифмической зависимостью энергии от размеров системы [70-73]. В результате при некоторой температуре, меньшей температуры Березинского-Костерлица-Таулеса [74, 75] ($T < T_{BKT}$) вихри связываются в пары и в системе существует квазидальний порядок [69-75]. Соответственно при температурах выше температуры Березинского-Костерлица-Таулеса квазидальный порядок разрушается. Поэтому вопрос о стабилизации дальнего магнитного порядка в анизотропных двумерных пленках другими типами взаимодействий является актуальным.

Одним из возможных механизмов стабилизации дальнего порядка – это учет релятивистских взаимодействий, приводящих к возникновению спонтанного магнитного момента. К подобного рода взаимодействиям относится, например, одноионная анизотропия типа легкая ось [76, 77], а также магнитоупругое взаимодействие [78, 79]. Причем возникновение в магнетике магнитоупругого взаимодействия связано с тем, что обменный интеграл наряду с константами одноионной анизотропии зависят от деформации кристаллической решетки. Таким образом, в магнитоупорядоченных системах возможно как обменное, так и одноионное магнитоупругие взаимодействия [80]. Однако в работе [81] показано, что обменное магнитоупругое взаимодействие вносит существенный вклад в формирование динамических свойств только для магнетиков со спином магнитного иона равным $\frac{1}{2}$. Соответственно в кристаллах со спином $S \geq 1$, в силу возникновения одноионной анизотропии, именно одноионная магнитоупругая связь является определяющей, а влиянием обменного магнитоупругого взаимодействия, как следствие, можно пренебречь [82, 83].

Необходимо отметить, что стабилизация дальнего магнитного порядка за счет магнитоупругого взаимодействия заключается в том, что данный вид взаимодействия приводит к гибридизации упругих и магнитных возбуждений, формируя, тем самым, связанную магнитоупругую волну [83-93]. При этом упругая подсистема также влияет на магнитную, в реузльтате чего в спектре магнонов возникает магнитоупругая щель [87, 88], что обеспечивает сходимость интеграла флуктуаций и, как следствие, стабилизацию дальнего порядка. При этом магнитная подсистема также оказывает влияние на упругую, что приводит на только к изменению скорости звука в кристалле, но и к сильной деформации спектра квазифононов в окрестности фазового перехода. Таким образом, в длинноволновом пределе при $k \to 0$ квазифононный закон дисперсии становится уже не линейным, а квадратичным, и фазовый переход протекает не по квазимагнонной, а по квазиакустической ветви спектра элементарных возбуждений [92, 94-97].

Как правило, магнитоупругое взаимодействие является самым слабым в магнитоупорядоченных системах. Тем не менее, его учет является важным, поскольку может играть решающую роль при формирование как статических свойств так и динамических особенностей в точках компенсации материальных параметров. Более того, магнитоупругое взаимодействие наряду с одноионной анизотропией являются проявлениями спин-орбитального взаимодействия в магнетике. Как результат, в ряде редкоземельных металлов, обладающих достаточно большой спин-орбитальной связью, наблюдаются «гигантские» магнитоупругие эффекты [98]. Исследование систем с большой магнитоупругой связью является актуальной на сегодняшний день задачей, поскольку они используются в технике при производстве мощных источников звуковых волн в звуковом и ультразвуковом диапазоне, а также перспективны для создания достаточно мощных приводов малых перемещений.

В качестве систем с большой магнитоупругой связи могут выспупать сплавы лантаноидов диспрозия и тербия с железом или кобальтом [99]. Также в [99] было показано, что редкоземельные металлы тербий и диспрозий, а также их сплавы и пленки феррит-гранатов при низких температурах обладают гораздо большей магнитострикцией чем у железа, кобальта или их сплавов. Более того, гигантская магнитострикция была обнаружена не только при низких, но и при комнатных температурах в интерметаллических соединениях $TbFe_2$, $DyFe_2$ и $Tb_xDy_{1-x}Fe_y$ (терфенол-Д). Причем, в отличие от соединений $TbFe_2$ и $DyFe_2$, где константы одноионной анизотропии имеют разные знаки, сохраняя большое значение магнитострkции, терфенол-Д обладает пониженной анизотропией. Уменьшение константы одноионной анизотропии, в результате ее компенсации и в подрешетке редкоземельного металла и в 3d-подрешетке переходного металла соединения позволяет получить достаточно высокое значение магнитострикционной восприимчивости даже при комнатных температурах, что было установлено экспериментально в работе [99] для соединения $Tb_{0.35}Dy_{0.45}Er_{0.2}Fe_{0.7}Co_{1.3}$. Известно, что константы одноионной анизотропии для железа и кобальта имеют разные знаки. Тогда, при замещении железа кобальтом магнитная анизотропия 3d-подрешетки существенно уменьшается, и с увеличением температуры, как было показано в [100], важную роль начинает играть компенсация одноионной анизотропии 3d- и 4f-подрешеток.

При теоретических исследованиях систем с магнитоупругой связью, используется, как правило, два основных взаимно дополняющих подхода.

Первый подход основан на рассмотрении системы в рамках общей гидродинамической теории, исключая динамику внутренних степеней свободы магнитоупорядоченного кристалла. Эффекты пространственной и временной дисперсии упругих свойств учитываются лишь на уровне симметрийном гидродинамическом, либо вовсе не входят в рассмотрение. Область применимости данного подхода ограничена большими значениями длин волн и, как следствие, такой гидродинамический подход не позволяет исследовать спиновую динамику, определяя в общем случае лишь акустические свойства системы [101]. Другой подход (феноменологический) основан на использовании конкретных динамических уравнений типа уравнения Ландау-Лифшица или некоторых его модификаций [93]. Данное обстоятельство позволяет существенно расширить область применимости подхода в область малых длин волн, а также исследовать динамические характеристики спиновой системы. Однако использование квазиклассических методов для описания спиновой динамики справедливо не для всех систем. В частности, при исследовании моделей магнитных пленок с большой одноионной анизотропией описанный выше метод не может быть использован в силу явления квантового сокращения спина [102]. Как уже было упомянуто выше, эффект квантового сокращения спина, при достаточно больших энергиях одноионной анизотропии, может привести к обращению в нуль среднего значения намагниченности на узле, и, как следствие, к реализации квадрупольного фазового состояния [102-104]. Однако именно в таких системах и наблюдаются наиболее сильные магнитоупругие эффекты, что связано с единой природой магнитоупругого взаимодействия и одноионной анизотропии [105]. Таким образом, при исследовании сильноанизотропных систем необходимо точно учитывать влияние как магнитоупругого взаимодействия, так и одноионной анизотропии, включая их в спиновый гамильтониан.

Проявление магнитоупругой связи имеет принципиальное значение в теории магнетизма, как уже было указано ранее. Более того, учет магнитоупругого взаимодействия позволяет более точно проанализировать результаты экспериментов, поскольку любые экспериментальные исследования подразумевают закрепление образца в установке тем или иным способом. Следовательно, необходимо учитывать накладываемые на образец механические граничные условия, которые будут определять структуру спонтанных деформаций магнитоупорядоченной системы. При этом, величина спонтанных деформаций будет оказывать влияние не только на термодинамические характеристики, но и на динамические особенности системы. Причем наиболее интересным является исследование тонких магнитных пленок с учетом механических граничных условий. Данное обстоятельство объясняется не только конечной толщиной пленки, что существенно влияет на структуру спонтанных деформаций, но и необходимостью учета влияния подложки на образец, что также можно смоделировать как наличие определенных граничных условий. Конечно же исследования магнитоупорядоченных систем с учетом механических граничных условий уже проводились ранее [106-108], однако на сегодняшний день этот вопрос изучен недостаточно.

Стабилизировать дальний магнитный порядок в системе можно также с помощью учета магнитодипольного взаимодействия [109]. В отличие от релятивистских взаимодействий (одноионная анизотропия, магнитоупругое взаимодействие) механизм стабилизации дальнего порядка магнитодипольным взаимодействием заключается в дальнодействующем характере магнитодипольных сил. То есть для бесконечной плоскости магнитная энергия будет минимальна при параллельной ориентации всех спинов, лежащих в этой плоскости. Любое же нарушение такого порядка создает магнитное поле, пропорциональное размеру локального нарушения в третьей степени, повышая, тем самым, энергию всей системы. При этом важно понимать, что стабилизация дальнего порядка магнитодипольным взаимодействием заключается в том, что его учет приводит к изменению вида закона дисперсии магнонов со стандартного $\omega \propto k^2$ на корневой $\omega \propto \sqrt{k}$. Данный факт и обеспечивает сходимость интеграла флуктуаций.

Хорошо известно, что в ультратонких пленках магнитодипольное взаимодействие проявляется наиболее сильно. При этом его учет может приводить к усилению легкоплоскостной анизотропии, что особенно существенно проявляется в сильноанизотропных магнитных пленках. Кроме того, магнитодипольное взаимодействие оказывает существенное влияние на динамические свойства пленок, в результате чего в системе могут существовать состояния с неоднородным распределением намагниченности [110], такие как плоско-параллельные домены [13, 111, 112] или вихревые структуры [113]. Причем, пространственно-неоднородное состояние может быть реализовано не только для ферромагнетиков, но и для антиферромагнетиков [114-118].

Отдельное внимание в теории магнетизма стоит уделить исследованию переориентационных фазовых переходов [119, 120], суть которых заключается в изменении ориентации вектора намагниченности между перпендикулярным и параллельным плоскости пленки направлениями при изменении температуры либо толщины пленки. В качестве примера можно привести хорошо известный переход Морина для α-Fe_2O_3, где с уменьшением температуры возникает фазовый переход от легкоосной ориентации спинов к их легкоплоскостной ориентации в Fe^{3+} [121, 122]. Переориентационные фазовые переходы в магнитных системах рассматривались во множестве работ [9, 11, 12, 123-125]. Однако, интересным было бы исследовать влияние магнитоупругого взаимодействия в точке фазового перехода, поскольку, несмотря на малость энергии данного вида взаимодействия, именно вблизи точек фазового перехода его учет приводит к таким эффектам, как гибридизация магнитных и упругих возбуждений, изменение скорости звука [93].

Фазовые переходы с изменением ориентации вектора намагниченности могут возникать под действием различных факторов: изменение внешнего магнитного поля, давления, температуры, размеров и формы магнитной пленки и так далее. Более того при изменении температуры могут существенно изменяться материальные параметры магнитоупорядоченной системы (считается, что зависимости различных материальных констант от температуры отличаются), вследствие чего имеет место быть фазовый переход по материальным параметрам, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [126]. Фазовые переходы в системах с конкуренцией обменной анизотропией и различными видами релятивистских взаимодействий рассматривались в [127, 128]. Также в работе [57] исследовались температурные фазовые переходы в трехмерном ферромагнетике при конкуренции обменной и одноионной анизотропий.

К простым негейзенберговским моделям, относятся модель Изинга описывающую сильноанизотропное обменное взаимодействия, а также модель Блюма-Эммери-Грифитса аналогичную модели Изинга, но с учетом как билинейного, так и биквадратичного обменного взаимодействия. Последняя была введена для описания поведения He^3-He^4 смеси [128]. Помимо указанных моделей, в теории низкоразмерных магнетиков используется также XY-модель, которая достаточно точно описывает поведение трехкомпонентных систем со слабым межплоскостным взаимодействием. Свойства ряда веществ, например K_2CuF_4, $(CH_3NH_3)_2CuCl_4$, $BaCo_2(AsO_4)_2$ и других хорошо описываются в рамках XY-модели [72]. Также, введение в гамильтониан, описывающий XY-модель, орторомбическую анизотропию позволяет исследовать свойства $MnCl_2{\cdot}4H_2O$ [129-131]. Спонтанная намагниченность отсутствует в изотропной XY-модели, так как в системе реализуется вихревая структура и дальний порядок разрушается [74, 75], однако, как уже было сказано, учет релятивистских взаимодействий (одноионная анизотропия, магнитоупругое и магнитодиполное взаимодействия) стабилизирует дальний магнитный порядок.

К магнитным системам с обменной анизотропией можно также отнести фрустрированные магнетики, то есть материалы, в которых магнитные моменты отдельных ионов взаимодействуют друг с другом посредством конкурирующих обменных взаимодействий, в результате чего основное состояние, так или иначе, вырождается. При соблюдении некоторых условий во фрустрированном магнетике могут реализовываться такие состояния как магнитная спираль, спиновая жидкость [30]. Поэтому магнитные материалы с конкуренцией релятивистских и обменных взаимодействий являются объектом повышенного интереса, что связано с поиском новых квантовых состояний.

Так, в 2004 году, экспериментально было обнаружено состояние «сверхтвердого» гелия ^4He [132, 133]. Также в [134] было экспериментально показано, что «сверхтвердое» состояние может наблюдаться в охлажденном до сверхнизких температур газе ионов рубидия. Причем термин «сверхтвердый» описывает не твердое тело, а сверхтекучий кристалл, то есть в [134] атомы рубидия распределялись по ячейкам, созданными полем оптической решетки, тем самым создавая кристалл.

Для спиновых систем может реализовываться аналогичное сверхтвердой фазе состояние, являющееся промежуточным состоянием между спин-флоп фазой и антиферромагнитной фазой [135] (см рис. 1), где параметры порядка обеих фаз сосуществуют (отличны от нуля). Таким образом, можно получить сверхтвердую магнитную фазу в квантовых магнетиках [136-141]. Более того, возможность существования сверхтвердой фазы было доказана для двухподрешеточных спиновых систем [58, 142]. Как результат, подобные системы стали объектом повышенного интереса, поскольку являются перспективными моделями в плане обнаружения сверхтвердого состояния [143-149].

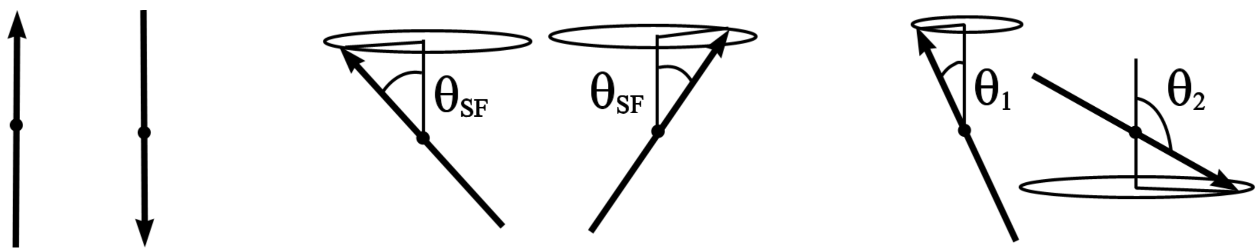

Рис. 1. Ориентация спинов соседних узлов с учетом и без учета одноионной анизотропии – слева на право: антиферромагнитное, спин-флоп и сверхтвердое упорядочение, соответственно [150].

В качестве одной из таких перспективных моделей является анизотропный гейзенберговский антиферромагнетик со спином магнитного иона равным единице. Реально существующие магнитные материалы с подобной структурой обменного взаимодействия обладающие легкоплоскостной одноионной анизотропией являются, например, $Ni(C_2H_8N_2)_2NO_2$ [151], а также $Ni(C_2H_8N_2)_2Ni(CN_4)$ [152]. Но интересующее нас сверхтвердое состояние в указанных материалах не реализуется. Данный факт обусловлен тем, что одним из необходимых условий реализации сверхтвердой фазы является существование в системе большой легкоплоскостной анизотропии. Однако, рассмотренные в [151, 152] магнитные материалы являются слабоанизотропными, и в низкотемпературном пределе (ниже температуры Нееля) находятся в спонтанно упорядоченном состоянии. Поэтому, приложение даже малого внешнего магнитного поля ориентирует все магнитные моменты в одном направлении, тем самым создавая феррамагнитное упорядочение.

Следовательно, нашей задачей является исследование антиферромагнитных магнитных материалов, обладающих большой одноионной легкоплоскостной анизотропией. К таким материалам относятся $CsFeBr_3$ [153, 154], $RbFeBr_3$ [155] и $CsFeCl_3$ [156]. В них основную роль в формировании динамических и статических свойств играют свойства отдельных спинов [157, 158]. Более того, существование в системе одноионной анизотропии приводит к явлению квантового сокращения спина на узле, в результате чего среднее значение намагниченности на узле (векторный параметр порядка) может обратиться в нуль. В таком случае в системе возникает дальний магнитный порядок тензорного типа соответствующий квадрупольному фазовому состоянию. То есть в магнитоупорядоченной системе параметры порядка формируют тензор квадрупольных моментов, что кардинально отличается от дипольных фазовых состояний (ферромагнитного, антиферромагнитного и т.д.), где магнитное упорядочение характеризуется векторным параметром порядка.

Помимо сильноанизотропных двухподрешеточных систем, описанных выше, сверхтвердое состояние может быть обнаружено во фрустрированных магнетиках [30, 159]. В качестве простого примера такой системы выступает двухподрешеточный антиферромагнетик с различным обменным взаимодействием между узлами одной подрешетки и узлами разных подрешеток. Интересным является тот факт, что в подобной системе могут возникать различные фазовые состояния: сверхтвердая фаза, спиновая жидкость, магнитное плато [30, 31, 159-161]. Все перечисленные выше состояния были обнаружены для $Ba_2CoGe_2O_7$, который является частным случаем двухподрешеточного антиферромагнетика с изингоподобным обменным взаимодействием [159, 160]. Однако, области существования указанных фазовых состояний, как и типы фазовых переходов существенно отличаются друг от друга. Более того, необходимо также учитывать влияние одноионной анизотропии на условия реализации этих фаз [31, 161].

Возможность существования сверхтвердой фазы в спиновых системах, а также условия ее реализации, области существования является актуальной задачей, которой посвящено довольно много исследований. В частности, подобное состояние наблюдается в двухподрешеточных антиферромагнетиках с большой легкоплоскостной анизотропией [162-164]. Однако теоретические и экспериментальные исследования проводились для случая трехмерных систем, в которых влияние магнитодипольного взаимодействия минимально, а, следовательно, не учитывалось. Поэтому интересным было бы рассмотреть условия существования сверхтвердой магнитной фазы в ультратонкой сильноанизотропной антиферромагнитной пленке двухподрешеточного магнетика. Такой объект с хорошей степенью точности можно считать двумерным, что приводит к тому, что в системе существенное влияние оказывает магнитодипольное взаимодействие. Интерес к исследованию свойств ультратонких пленок обусловлен тем, что они являются перспективными объектами для создания устройств квантовой обработки информации [165, 166] и квантовых вычислений [167]. Более того, магнитодипольное взаимодействие играет значительную роль не только в кристаллах, но и в спиновых конденсатах [168].

В реущльтате вышесказанного, **актуальность темы** определяется во-первых высокой технологической востребованностью магнитных наноструктур, во-вторых необходимостью поиска новых фазовых состояний с интересными свойствами и квантовыми эффектами, а также принципиальной важностью развития фундаментальной теории магнетизма и физики твердого тела.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Работа была выполнена на кафедре теоретической физики и физики твердого тела Физико-технического института Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского. Исследования, входящие в содержание диссертации, были выполнены в рамках следующих проектов РФФИ:

- Проект 14-42-01527 «Динамика и статика изотропных и анизотропных негейзенберговских магнетиков» (код проекта р_юг_а), 2014 г.
- Проект 15-42-01007 «Сверхтвердое магнитное состояние в 2D негейзенберговских антиферромагнетиках с S=1» (код проекта р_юг_а), 2015 г.
- Проект 16-02-00069 «Линейная и нелинейная динамика негейзенберговских магнетиков» (код проекта А), 2016-2018 гг.
- Проект 16-42-910441 «Фазовые состояния анизотропных двухподрешеточных негейзенберговских магнетиков» (код проекта р_а), 2017 г.

Цель и задачи исследования. Основной целью диссертационной работы является теоретическое исследование фазовых состояний, условий их реализации и динамических особенностей гейзенберговских и негейзенберговских магнетиков с учетом влияния релятивистских взаимодействий (одноионная анизотропия, магнитоупругое взаимодействие). В соответствии с основной целью работы были поставлены и решены следующие задачи:

1. Определить фазовые состояния объемного сильноанизотропного гейзенберговского магнетика с конкурирующими легкоплоскостной и

наклонной одноионными анизотропиями, исследовать условия их реализации и фазовые переходы.

2. Исследовать влияние магнитоупругого взаимодействия на статические и динамические свойства объемного сильноанизотропного гейзенберговского магнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями.
3. Определить фазовые состояния, динамические и статические свойства ультратонкой сильноанизотропной магнитной пленки с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями с учетом магнитоупругого и магнитодипольного взаимодействий.
4. Исследовать возможность реализации сверхтвердой магнитной фазы во фрустрированном сильноанизотропном антиферромагнетике с изингоподобным обменным взаимодействием.

Объектом исследования являются сильноанизотропные двухмерные и трехмерные гейзенберговские и негейзенберговские магнетики.

Предметом исследования являются фазовые состояния, статические и динамические свойства магнитоупорядоченных систем, элементарные возбуждения с учетом влияния релятивистских взаимодействий.

Методы исследования. Известно, что при описании анизотропных магнетиков, в которых наблюдаются такие квантовые эффекты как сокращение спина или реализация квадрупольного фазового состояния, использовать стандартные методы спин-волновой теории невозможно. В частности, уравнение Ландау-Лифшица, описывающее динамику вектора намагниченности справедливо лишь в том случае, когда длина вектора намагниченности сохраняется. Метод ренорм-группы, основанный на полном учете флуктуаций всех параметров порядка позволяет определить критические значения параметров системы, однако исследовать динамические свойства, определить спектры элементарных возбуждений этим методом невозможно [76, 169-174].

Точный учет релятивистских взаимодействий (одноионная анизотропия, магнитоупругое взаимодействие) возможен с использованием техники операторов Хаббарда [102, 175-183]. Причем, в представлении операторов Хаббарда системы, обладающие парным взаимодействием, приобретают одинаковый вид [175]. Более того, данный метод справедлив для любых соотношений материальных параметров и при любой температуре, за исключением флуктуационной области.

Для определения динамических особенностей магнитоупорядоченной системы и спектров элементарных возбуждений используется метод диаграммной техники для функции Грина [184]. Также с операторами Хаббарда связан метод бозонизации [118, 185-187], в основе которого лежит построение бозе-аналога гамильтониана исследуемой системы. Данный метод позволяет достаточно просто определить спектры элементарных возбуждений, а также вычислить тепловые флуктуации в системе.

Научная новизна полученных результатов. Указанные выше задачи исследования являются оригинальными проблемами науки, которые были определены и решены в рамках данной диссертационной работы. В итоге были получены следующие новые результаты:

1. Впервые исследована модель объемного сильноанизотропного гейзенберговского ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями при произвольном соотношении между материальными параметрами. Получены фазовые состояния, определены области их устойчивости и спектры магнонов, определен тип фазового перехода.
2. Впервые изучено влияние магнитоупругого взаимодействия с учетом механических граничных условий на статические и динамические свойства сильноанизотропного гейзенберговского ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями. Показано, что учет магнитодипольного взаимодействия приводит лишь к статическим перенормировкам

спектров магнитоупругих волн и областей существования фазовых состояний, но не проявляется динамически.

3. Впервые исследована ультратонкая сильноанизотропная ферромагнитная пленка с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями с учетом магнитодипольного, магнитоупругого взаимодействий и механическими граничными условиями. Получены фазовые состояния системы, области их существования и спектры элементарных возбуждений. Показано, что магнитодипольное взаимодействие проявляется как статически, так и динамически, что заключается в реализации состояния с пространственно-неоднородным распределением намагниченности.
4. Впервые рассмотрена возможность реализации сверхтвердой магнитной фазы в ультратонкой сильноанизотропной пленке двухподрешеточного антиферромагнетика с фрустрированным изингоподобным взаимодействием. Исследовано влияние магнитодипольного взаимодействия на область существования и динамические свойства сверхтвердой магнитной фазы.

Научные положения выносимые на защиту:

1. В ферромагнетике с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями возможно существование двух фаз: угловой ферромагнитной фазы, с углом ориентации вектора намагниченности, определяемым соотношением между константами анизотропий, и квадурпольной фазы с нулевым значением намагниченности на узле, описывающееся тензорным параметром порядка. Фазовый переход между ферромагнитным и квадрупольным состояниями является фазовым переходом первого рода и протекает через промежуточное состояние.
2. Влияние учета механических граничных условий на свойства ферромагнетика с комбинацией легкоплоскостной и наклонной одноионных анизотропий приводит к тому, что равновесный угол

ориентации вектора намагниченности в ферромагнитной фазе определяется не только соотношением между константами анизотропий, но и спонтанными деформациями. При этом влияние магнитоупругого взаимодействия на магнитную подсистему сводится к статическим перенормировкам спектров квазимагнонов. Влияние магнитной подсистемы на упругую приводит к изменению скоростей звука в системе в угловой ферромагнитной фазе. В квадрупольной фазе скорости звука не перенормируются магнитоупругим взаимодействием.

3. В ультратонкой ферромагнитной пленке с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными существенное влияние оказывает магнитодипольное взаимодействие, учет которого приводит к усилению легкоплоскостной анизотропии. Динамическое проявление магнитодипольного взаимодействия приводит к реализации пространственно неоднородного состояния с периодом неоднородности, значение которого существенно зависит от материальных параметров системы и от ориентации волнового вектора в базисной плоскости пленки.
4. В двумерной модели сильноанизотропного двухподрешеточного магнетика с фрустрированным изингоподобным обменным взаимодействием в случае сильного внешнего магнитного поля в системе реализуется ферромагнитное состояние, а в случае слабого внешнего магнитного поля – квадрупольное состояние. При промежуточных значениях внешнего магнитного поля антиферромагнитное упорядочение в системе приводит к реализации сверхтвердого состояния. Учет магнитодипольного взаимодействия приводит к возникновению пространственно-неоднородного состояния, возникающего только при определенной ориентации волнового вектора в плоскости пленки.

Достоверность полученных результатов подтверждается выбранными для решения поставленных задач диссертационной работы теоретическими методами, обеспечивающими наиболее точный учет влияния исследуемых взаимодействий. Также, полученные результаты хорошо согласуются с уже известными результатами, полученными в других работах ранее, а также подтверждаются известными экспериментальными данными. Полученные из численных расчетов по аналитическим выражениям результаты соответствуют известным данным прямого компьютерного моделирования.

Научная и практическая ценность полученных результатов. В диссертационной работе исследуются свойства различных магнитоупорядоченных систем, проводится анализ возможных фазовых состояний, фазовых переходов и динамических особенностей, а также влияние на них разных магнитных взаимодействий. В итоге автором исследован ряд теоретических моделей. Результат исследований хорошо согласуются с экспериментальными данными, что может быть использовано при подготовке и проведении экспериментов, а также для интерпретации и анализа экспериментальных результатов. Модели, описанные в работе, могут быть использованы при моделировании и создании магнитных материалов с заданными свойствами. Также, результаты диссертации могут быть использованы в учебных целях при подготовки специализированных курсов по физике твердого тела и теории магнетизма.

Апробация результатов диссертации. Результаты, описанные в диссертационной работе многократно докладывались на научных международных конференциях. Результаты исследований свойств сильноанизотропного ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями докладывались на конференции 3rd International Conference for Young Scientists “LOW TEMPERATURE PHYSICS-2012”; результаты исследования влияния механических граничных условий на динамические свойства и фазовые состояния ферромагнетика с конкурирующими анизотропиями были представлены на конференциях 4th

International Conference for Young Scientists “LOW TEMPERATURE PHYSICS-2013”, 3rd International Conference “Nanomaterials: Applications and Properties-2013”; результаты исследований фазовых состояний и фазовых переходов ультратонкой магнитной пленки были представлены на конференциях International Conference “Functional Materials” – ICFM-2013, 5th International Conference for Young Scientists “LOW TEMPERATURE PHYSICS-2014”; результаты исследований возможности реализации сверхтвердой магнитной фазы в ультратонкой пленке сильноанизотропного изингоподобного антиферромагнетика докладывались на XXI Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых «ВНКСФ-21» и на Международной конференции «Микроэлектроника 2015». Также, результаты диссертации докладывались на научных семинарах Физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского (Симферополь).

Публикации. Вошедшие в диссертационную работу результаты были опубликованы в 1 коллективной монографии, в 5 статьях в журналах, входящих в список ВАК Росиийской Федерации, и в 6 докладах, опубликованных в материалах конференций.

Личный вклад автора. Автор принимал активное участие в постановке задач, их решении, а также в интерпретации и анализе полученных результатов. В работах [200, 204, 205, 208] автором были выполнены аналитические расчеты свободных энергий и спектров элементарных возбуждений, получены фазовые состояния и их линии потери устойчивости. Также автором были построены фазовые диаграммы двумерного и трехмерного гейзенберговского ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной анизотропиями без учета и с учетом механических граничных условий и фазовая диаграмма ультратонкой пленки двухподрешеточного изингоподобного легкоплоскостного антиферромагнетика. Автор участвовал в анализе спектров элементарных возбуждений, в исследовании зависимостей свойств магнитоупорядоченных систем от соотношений между материальными параметрами, в определении типов фазовых переходов. Кроме того автор выполнил численные расчеты линий потери устойчивости фазовых состояний в работах [204, 205].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 разделов, заключения и списка используемых источников из 208 наименований. Общий объем диссертации составляет 142 страниц текста с 16 рисунками.

Во **введении** проведен анализ проблемы, раскрывается ее значимость на сегодняшний день; сформулированы и поставлены цели и задачи исследований; уточняется достоверность и область применения полученных результатов.

В **первом разделе** исследуется модель объемного сильноанизотропного гейзенберговского ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями. Рассматриваются возможные фазовые состояния, условия из реализации и динамические свойства.

Во **втором разделе** рассматривается влияние магнитоупругого взаимодействия на динамические и статические свойства объемного сильноанизотропного гейзенберговского ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями с заданными механическими граничными условиями.

В **третьем разделе** исследуется влияние магнитоупругого и магнитодипольного взаимодействия ультратонкой сильноанизотропной ферромагнитной пленки с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями с заданными механическими граничными условиями.

В **четвертом разделе** рассматривается модель ультратонкой сильноанизотропной пленки двухподрешеточного антиферромагнетика с фрустрированным изингоподобным взаимодействием. Исследуются возможность и условия реализации сверхтвердой магнитной фазы, а также влияние магнитодипольного взаимодействия на фазовые состояния и динамические свойства системы.

В **заключении** придставлены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Раздел 1. Динамические и статические свойства ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями

Хорошо известно, что одним из проявлений спин-орбитального взаимодействия в магнитных диэлектриках является одноионная анизотропия [33]. Простейшая модель, в которой возможна реализация такой анизотропии – это магнетик со спином магнитного иона равным единице. Как правило, в подобных моделях тензор одноионной анизотропии диагонален, в результате чего в магнетике возникает одноосная одноионная анизотропия. Однако существует довольно большой класс магнитоупорядоченных систем, в которых тензор анизотропии не является диагональным. Это объясняется тем, что при создании магнитных систем возникают некоторые технологические сложности, нарушающие диагональность тензора одноионной анизотропии. В результате вышесказанного, модель, в которой также будут учтены недиагональные компоненты тензора одноионной анизотропии является более реалистичной.

Такие модели интересны, поскольку они достаточно точно учитывают энергию анизотропии разориентированных феррит-гранатовых пленок. Ранее было показано [39], что в (111)-разориентированных пленках в рамках двухпараметрической модели [35] возникает лекгоосная анизотропия с осью легкого намагничения, находящейся в плоскости (110), в которой лежит угол разориентации. В работе [37] по исследованиям процессов перемагничивания (112) пленок, являющиеся частным случаем (111)-разориентированных пленкок, было показано, что вектор магнитного момента находится в одной плоскости с внешним магнитным полем. Следовательно, при введении координат X и Z в этой плоскости [37, 38], энергия одноионной анизотропии будет описываться двумя константами: β_{zz} и β_{zx}.

Данная модель описывает как анизотропию в плоскости XOZ с осью легкого намагничения, ориентированной под некоторым углом к оси OZ, так и анизотропию типа легкая плоскость с базисной плоскостью XOY. В дальнейшем мы будем называть легкоосную анизотропию наклонной [188, 189].

Существует ряд причин, по которым в магнитоупорядоченных системах возникает подобного рода сложная анизотропия. Так, например, в случае нарушения химического состава пленки, наклонная анизотропия действует в плоскости перпендикулярной плоскости пленки. Другой причиной является рассогласование между магнитной подсистемой и упругой подсистемой подложки. В этом случае наклонная анизотропия, как правило, действует в плоскости пленки.

В данном разделе исследуются статические и динамические свойства магнитоупорядоченной системы с конкурирующими наклонной и легкоплоскостной одноионными анизотропиями.

В **первом подразделе** будет описана модель исследуемой системы и определены возможные фазовые состояния, а также влияние наклонной анизотропии на статические свойства системы.

Во **втором подразделе** мы определим спектры магнонов, получим аналитические выражения для линий потери устойчивости фазовых состояний, а также тип и линию фазового перехода при произвольных соотношениях между материальными параметрами системы.

1.1. Фазовые состояния ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями

Рассмотрим описанную выше магнитную систему со спином магнитного иона $S=1$. Гамильтониан такого магнетика имеет следующий вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{n,n'} J_{nn'}\vec{S}_n\vec{S}_{n'} + \beta\sum_n (S_n^z)^2 - \beta_{zx}\sum_n\left(S_n^z S_n^x + S_n^x S_n^z\right) \tag{1.1}$$

В (1.1) введены следующие обозначения: $J_{nn'}$ - обменный интеграл, $\vec{S}_n$ - спиновый оператор в узле n, β - константа легкоплоскостной анизотропии с базисной плоскостью XOY, β_{zx} - константа наклонной анизотропии в плоскости XOZ. Дальнейшее рассмотрение системы будем проводить в области низких температур, много меньших температуры Кюри ($T \ll T_C$), поскольку, в данной области исследуемые эффекты проявляются наиболее сильно.

Очевидно, что конкуренция легкоплоскостной и наклонной анизотропий приводит к ориентации магнитного момента под некоторым углом θ к оси OZ в плоскости XOZ (рис.1.1).

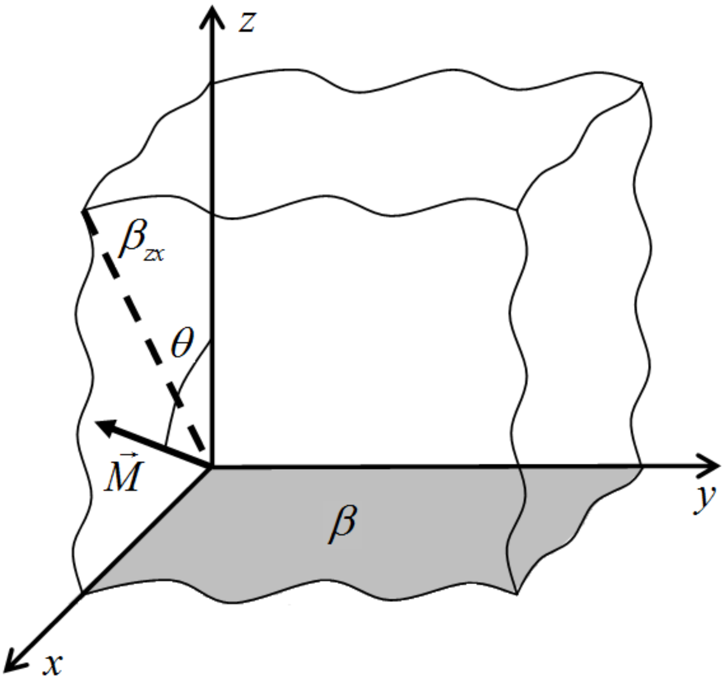

Рис.1.1 Геометрия исследуемой модели

Для упрощения дальнейших вычислений сделаем унитарное преобразование вида $U(\theta) = \prod_n \exp\left[i\theta S_n^y\right]$, описывающее поворот системы координат вокруг оси OY на угол θ. В результате такого преобразования, в новой системе координат магнитный момент будет ориентирован вдоль оси OZ. Значение равновесного угла определяется из условия минимума свободной энергии системы. Выделяя в этом случае среднее поле, получаем одноузельный гамильтониан в виде:

$$\mathcal{H}_0(\theta) = -\bar{H}\sum_n S_n^z + B_2^0(\theta)\sum_n \left(S_n^z\right)^2 + B_2^2(\theta)\sum_n O_{2n}^2 + B_2^{xz}(\theta)\sum_n O_{2n}^{xz}. \quad (1.2)$$

В выражении (1.2) введены следующие обозначения:

$$B_2^0(\theta)=\frac{1}{8}\{\beta+3\beta\cos 2\theta-6\beta_{xz}\sin 2\theta\};$$
$$B_2^2(\theta)=\frac{1}{8}\{\beta-\beta\cos 2\theta+2\beta_{xz}\sin 2\theta\}; \qquad (1.3)$$
$$B_2^{xz}(\theta)=-\frac{1}{4}\{\beta\sin 2\theta+2\beta_{xz}\cos 2\theta\};\ \bar{H}=J_0\langle S^z\rangle;$$

где $B_2^i(\theta)$ - компоненты тензора эффективной анизотропии; операторы Стивенса [190]:

$$O_2^2=\left(S^x\right)^2-\left(S^y\right)^2;\ O_2^{zx}=S^zS^x+S^xS^z. \qquad (1.4)$$

Очевидно, что одноузельный гамильтониан (1.2) не является диагональным. Дальнейшая наша задача состоит том, чтобы привести его к диагональному виду. Для этого воспользуемся методом, в основе которого лежит использование алгебры операторов Хаббарда [175]. Построим операторы Хаббарда вида $X^{MM'}=|\psi(M)\rangle\langle\psi(M')|$ в базисе оператора S^z. Спиновые операторы связаны с операторами Хаббарда следующими соотношениями:

$$S^z=X^{11}-X^{-1-1};\quad S^+=\sqrt{2}\left(X^{10}+X^{0-1}\right);\quad S^-=\left(S^+\right)^+, \qquad (1.5)$$

где $S^+=S^x+iS^y,\quad S^-S^x-iS^y$. В итоге с использованием выражений (1.4) и (1.5), одноузельный гамильтониан (1.2) в терминах операторов Хаббарда принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0(\theta)=&\left\{-\bar{H}+B_2^0(\theta)+2B_2^2(\theta)\right\}X^{11}+2B_2^0(\theta)X^{00}+\\&+\left\{\bar{H}+B_2^0(\theta)+2B_2^2(\theta)\right\}X^{-1-1}+B_2^2(\theta)\left(X^{1-1}+X^{-11}\right)+\\&+\frac{\sqrt{2}}{2}B_2^{xz}(\theta)\left(X^{10}+X^{01}-X^{0-1}-X^{-10}\right)\end{aligned} \qquad (1.6)$$

Известно, что одноузельный гамильтониан в терминах операторов Хаббарда, построенных в базисе собственных функций принимает диагональный вид, в котором коэффициенты при диагональных операторах X^{ii} имеют смысл энергетических уровней магнитного иона. Однако, выражение

(1.6) описывает одноузельный гамильтониан в терминах операторов Хаббарда, построенных в базисе оператора S^z. Поэтому перепишем выражение для одноузельного гамильтониана (1.6) формально в общем виде $\mathcal{H}_0(\theta)=\sum_i \varepsilon_i X^{ii}+\sum_{i\neq j} V_{ij}X^{ij}$, где ε_i - диагональные амплитуды имеющие смысл «затравочных» энергетических уровней магнитного иона, V_{ij} - недиагональные амплитуды.

Дальнейшую диагонализацию будем проводить, используя метод диагонализации многоуровневых гамильтонианов унитарными преобразованиями группы *U(N)* [191]. Для этого построим унитарный оператор вида $U_{nm}(\alpha)=\exp\left(\alpha X^{nm}-\alpha^* X^{mn}\right)$, описывающий «поворот» в пространстве состояний на «угол» α в «плоскости» между состояниями $|n\rangle$ и $|m\rangle$, где $n,m=1,0,-1$. В результате таких преобразований гамильтониан (1.6) примет диагональный вид:

$$\tilde{\mathcal{H}}_0(\theta)=U^+_{nm}(\alpha)\mathcal{H}_0(\theta)U_{nm}(\alpha)=\sum_i E_i X^{ii}$$

при этом параметры унитарных преобразований определяются из уравнения $\tilde{V}_{ij}(\alpha)=U^+_{nm}(\alpha)V_{ij}U_{nm}(\alpha)=0$.

В общем случае для приведения гамильтониана N-уровневой системы к диагональному виду необходимо сделать $N(N-1)$ вышеуказанных унитарных преобразований. Однако, в исследуемой нами системе, вследствие симметрии тензора эффективной анизотропии, для полной диагонализации гамильтониана (1.6) достаточно двух унитарных преобразования $U_{1-1}(\alpha)$ и $U_{10}(\delta)$, описывающих «повороты» между состояниями $(|1\rangle,|-1\rangle)$ и $(|1\rangle,|0\rangle)$ соответственно. Решая систему уравнений, полученную при обращении в нуль недиагональных амплитуд, определим параметры унитарных преобразований:

$$\bar{H}\,\mathrm{tg}\,2\alpha=-B_2^2(\theta);\quad \sqrt{\chi}\left(\chi+B_2^0(\theta)\right)\mathrm{tg}\,2\delta=\sqrt{2\left(\chi+B_2^2(\theta)\right)}B_2^{zx}(\theta) \quad (1.7)$$

где введено обозначение $\chi = \sqrt{\bar{H}^2 + \left(B_2^2(\theta)\right)^2}$.

Таким образом в терминах операторов Хаббарда одноузельный гамильтониан становится диагональным, а энергетический спектр магнитного иона определяется следующими соотношениями:

$$E_{1,0} = \frac{B_2^0(\theta) - \chi}{2} + 2B_2^2(\theta) \pm \sqrt{\left(B_2^0(\theta) - \chi\right)^2 + 2\left(B_2^{zx}(\theta)\right)^2 \frac{\chi + B_2^2(\theta)}{\chi}};$$
$$E_{-1} = B_2^0(\theta) + 2B_2^2(\theta) + \chi. \tag{1.8}$$

Из (1.8) следует, что при любом соотношении между материальными параметрами нижайшим энергетическим уровнем, соответствующем основному состоянию, является E_1. То есть в исследуемой нами системе не происходит инверсии энергетических уровней при изменении материальных параметров. Поскольку, в рассматриваемом нами низкотемпературном пределе энергия основного состояния определяет плотность свободной энергии F, получим:

$$F = \frac{B_2^0(\theta) - \chi}{2} + 2B_2^2(\theta) + \sqrt{\left(B_2^0(\theta) - \chi\right)^2 + 2\left(B_2^{zx}(\theta)\right)^2 \frac{\chi - B_2^2(\theta)}{\chi}} \tag{1.9}$$

Как известно, равновесные значения параметров системы определяются из условий минимума свободной энергии. В данной ситуации определим равновесное значение угла ориентации магнитного момента:

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = -\frac{2\beta_{zx}}{\beta} \tag{1.10}$$

Перепишем, с учетом выражения (1.10), компоненты тензора эффективной анизотропии (1.3), следующим образом:

$$B_2^0(\theta_0) = \frac{1}{8}\left(\beta - 3\sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2}\right);$$
$$B_2^2(\theta_0) = \frac{1}{8}\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2}\right); \tag{1.11}$$
$$B_2^{xz}(\theta_0) = 0.$$

Как видно из выражений (1.11) тензор эффективной анизотропии стал диагональным, т.е. в связанной с магнитным моментом системе координат мы свели исследуемую систему с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной анизотропиями к системе с эффективной двухосной анизотропией. Следовательно, рассматриваемая нами магнитоупорядоченная система ведет себя как двухосный ферромагнетик с константами эффективной анизотропии $B_2^0(\theta_0)$ и $B_2^2(\theta_0)$ определяющимися соотношениями (1.11).

Более того, очевидно, что с учетом выражения (1.10) унитарное преобразование $U_{10}(\delta)$ теряет смысл, поскольку параметр δ обращается в нуль. Следовательно, гамильтониан (1.6) на самом деле приводится к диагональному виду только одним унитарным преобразованием $U_{1-1}(\alpha)$. С учетом этого, энергетические уровни магнитного иона приобретают более простой вид:

$$E_{1,-1} = \mp\chi + B_2^0(\theta_0) + 2B_2^2(\theta_0);$$
$$E_0 = 2B_2^2(\theta_0). \tag{1.12}$$

Далее определим волновые функции магнитного иона. Следуя используемому методу унитарных преобразований, волновую функцию можно получить следующим способом: $|\psi(i)\rangle = U_{1-1}^{+}(\alpha)|i\rangle$. Таким образом, подставляя в это выражение значение параметра унитарного преобразования (1.7) в нашем случае, получим:

$$|\psi(1)\rangle = \cos\alpha|1\rangle + \sin\alpha|-1\rangle;$$
$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle; \tag{1.13}$$
$$|\psi(-1)\rangle = -\sin\alpha|1\rangle + \cos\alpha|-1\rangle.$$

Поскольку нижайшим энергетическим уровнем, как было сказано ранее, всегда является E_1, то соответствующая ему волновая функция $|\psi(1)\rangle$ определяет основное состояние системы. В связи с изменением вида волновых функций, построенные на них операторы Хаббарда также изменятся, в результате чего соотношения, связывающие спиновые операторы с операторами Хаббарда, примут новый вид:

$$S^z = \cos 2\alpha\left(X^{11} - X^{-1-1}\right) - \sin 2\alpha\left(X^{1-1} + X^{-11}\right);$$
$$S^+ = \sqrt{2}\cos\alpha\left(X^{10} + X^{0-1}\right) + \sqrt{2}\sin\alpha\left(X^{01} - X^{-10}\right); \qquad (1.14)$$
$$S^- = \left(S^+\right)^+.$$

Очевидно, что при подстановке выражений (1.14) и (1.7) в (1.2), одноузельный гамильтониан принимает диагональный вид в терминах операторов Хаббарда, причем диагональными элементами являются энергетические уровни магнитного иона (1.12):

$$\mathcal{H}_0\left(\theta_0\right) = \sum_i E_i X^{ii} \qquad (1.15)$$

Из выражения (1.14) легко получить, что среднее значение намагниченности на один узел, являющееся векторным параметром порядка системы, определяется соотношением $\left\langle S^z \right\rangle = \cos 2\alpha = \dfrac{\bar{H}}{\chi}$. Причем, в зависимости от соотношения между материальными параметрами значения данного параметра порядка существенно меняются. Поэтому рассмотрим три предельных случая. Так, в случае слабоанизотропного магнетика $\left(J_0 \gg \beta, \beta_{zx}\right)$ значение параметра порядка $\left\langle S^z \right\rangle \approx 1$, соответствующее ферромагнитному упорядочению магнитных моментов. Поскольку в рассматриваемом случае магнитный момент ориентирован под некоторым углом, определяемым соотношением (1.10), то данное состояние является угловым ферромагнитным (УФМ).

Однако при увеличении констант анизотропии значение параметра порядка уменьшается, т.е. наблюдается эффект квантового сокращения спина на узле [46, 50-53, 61, 62, 191-193]. Причем, данный эффект, как следует из выражений (1.7) и (1.11) будет наблюдаться как при увеличении константы легкоплоскостной анизотропии β, так и при увеличении константы наклонной анизотропии β_{zx}. Это объясняется тем, что константы легкоплоскостной и наклонной анизотропий связаны соотношениями (1.11) для компонентов тензора эффективной анизотропии. В случае сильноанизотропного магнетика $\left(J_0 \gg \beta, \beta_{zx}\right)$ векторный параметр порядка обращается в нуль $\left\langle S^z \right\rangle = 0$ [46, 64]. Однако это состояние не является парамагнитным, поскольку не реализуется характерное для парамагнитного состояния соотношение $\left\langle \left(S^x\right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(S^y\right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(S^z\right)^2 \right\rangle = \dfrac{2}{3}$. В полученном нами состоянии компоненты тензора квадрупольных моментов определяются соотношениями: $q_2^0 = \left\langle O_2^0 \right\rangle = 1; \quad q_2^2 = \left\langle O_2^2 \right\rangle = -1; \quad q_2^{zx} = \left\langle O_2^{zx} \right\rangle = 0$. Таким образом исследуемое состояние является квадрупольным (КУ), описывающееся уже не векторным, а тензорными параметрами порядка [46-53, 61-62, 195-198]. Причем геометрическим образом данного состояния в спиновом пространстве является плоский диск, ориентированный в плоскости ZOY.

В интервале материальных параметров между УФМ и КУ фазами реализуется некоторое смешанное квадрупольно-ферромагнитное состояние (КФМ) в котором одновременно сосуществуют векторный и тензорный параметры порядка (рис. 1.2), определяемые выражениями:

$$\begin{gathered} \left\langle S^z \right\rangle = \sqrt{1 - \left(\frac{B_2^2\left(\theta_0\right)}{J_0^2} \right)^2}; \\ q_2^0 = \left\langle O_2^0 \right\rangle = 1; \quad q_2^2 = \left\langle O_2^2 \right\rangle = -\frac{B_2^2\left(\theta_0\right)}{J_0}; \quad q_2^{zx} = \left\langle O_2^{zx} \right\rangle = 0. \end{gathered} \tag{1.16}$$

Таким образом, в исследуемом магнетике с комбинацией легкоплоскостной и наклонной анизотропий возможна реализация трех фазовых состояний, в зависимости от соотношений между материальными параметрами [199-201].

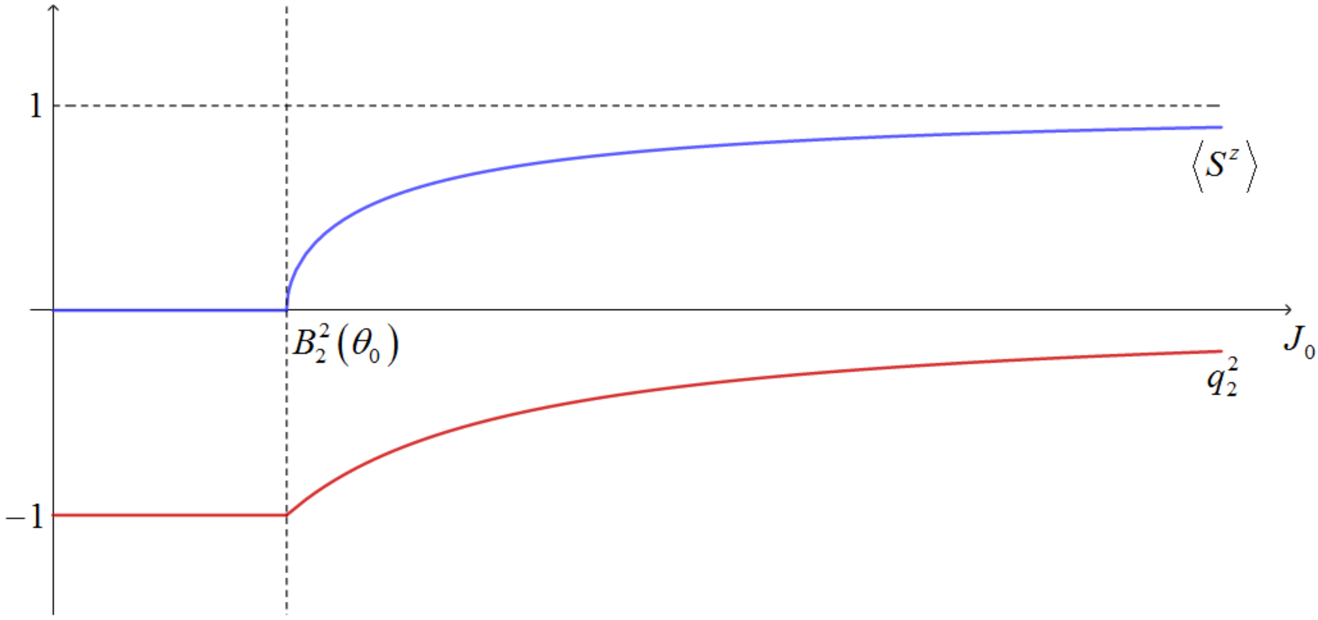

Рис. 1.2. Поведение параметров порядка для различных соотношений между материальнми параметрами системы

1.2 Спектры элементарных возбуждений и линии устойчивости фазовых состояний ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями

Проведенный анализ свободной энергии системы позволил нам определить устойчивые фазовые состояния, а также линии фазовых переходов. Однако этот анализ не дает возможности определить тип фазовых переходов. Эту возможность предоставляет исследование динамических свойств системы, то есть спектров элементарных возбуждений в соответствующих фазах. Для определения спектров магнонов применим метод бозонизации операторов Хаббарда [186], реализация которого осуществляется в два этапа. Во-первых, необходимо переписать полный гамильтониан системы (1.1) в терминах операторов Хаббарда, построенных в базисе собственных функций (1.13) одноузельного гамильтониана (1.2). Для этого используя выражения (1.14) и (1.15), получим:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}(\theta)=\sum_i E_i X^{ii}-\\
&-\frac{1}{2}\sum_{n,n'} J_{nn'}\left\{X_n^{10}X_{n'}^{01}+X_n^{01}X_{n'}^{10}+X_n^{0-1}X_{n'}^{-10}+X_n^{-10}X_{n'}^{0-1}+\right.\\
&+\cos^2\alpha\left(X_n^{10}X_{n'}^{-10}+X_n^{10}X_{n'}^{0-1}+X_n^{0-1}X_{n'}^{01}+X_n^{-10}X_{n'}^{10}\right)-\\
&-\sin^2\alpha\left(X_n^{01}X_{n'}^{0-1}+X_n^{01}X_{n'}^{-10}+X_n^{-10}X_{n'}^{10}+X_n^{0-1}X_{n'}^{01}\right)+\\
&\left.+\sin 2\alpha\left(X_n^{10}X_{n'}^{10}+X_n^{01}X_{n'}^{01}-X_n^{0-1}X_{n'}^{0-1}-X_n^{-10}X_{n'}^{-10}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

Во-вторых, необходимо поставить в соответствие операторам Хаббарда X_n^{ij} псевдо- операторы Хаббарда $\tilde{X}_n^{ij}$, которые связаны с Бозе-операторами рождения и уничтожения магнонов. В нашем случае, поскольку основным состоянием магнитного иона описывается волновой функцией $\left|\psi(1)\right\rangle$, то связь псевдохаббардовских операторов с Бозе-операторами принимает следующий вид [187]:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{X}_n^{11}=1-a_n^+a_n-b_n^+b_n;\quad \tilde{X}_n^{00}=a_n^+a_n;\quad \tilde{X}_n^{-1-1}=b_n^+b_n;\\
&\tilde{X}_n^{1-1}=\left(1-a_n^+a_n-b_n^+b_n\right)b_n;\quad \tilde{X}_n^{10}=\left(1-a_n^+a_n-b_n^+b_n\right)a_n;\quad \tilde{X}_n^{0-1}=a_n^+b_n;\\
&\tilde{X}_n^{-11}=b_n^+;\quad \tilde{X}_n^{01}=a_n^+;\quad \tilde{X}_n^{-10}=b_n^+a_n,
\end{aligned} \tag{1.18}
$$

где a,a^+ - бозе-операторы рождения и уничтожения, описывающие переход магнитного иона между основным состоянием E_1 и первым возбужденным состоянием E_0; b,b^+ - бозе-операторы рождения и уничтожения, описывающие переход магнитного иона между основным состоянием E_1 и вторым возбужденным E_{-1}. Следовательно, подставляя выражения связи псевдохаббардовских операторов с бозе-операторами (1.18) в полный гамильтониан (1.17), получим бозевский аналог гамильтониана, описывающий энергию идеального газа магнонов:

$$\mathcal{H}\left(\theta\right)=E_1+\left(E_0-E_1\right)\sum_n a_n^+a_n+\left(E_{-1}-E_1\right)\sum_n b_n^+b_n+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n,n'}J_{nn'}\left\{a_na_{n'}^++a_n^+a_{n'}+\sin2\alpha\left(a_na_{n'}+a_n^+a_{n'}^+\right)\right\} \tag{1.19}$$

В выражении (1.19) опущены слагаемые выше второй степени по бозе-операторам, поскольку такие слагаемые описывают взаимодействие магнонов, а нас интересуют лишь спектры элементарных возбуждений, определяемые квадратичными слагаемыми. То есть в нашем случае мы рассматриваем идеальный газ магнонов с энергией (1.19). Далее необходимо провести диагонализацию полученного гамильтониана (1.19) стандартным u-v преобразованием Боголюбова, вследствие чего, получим, что,

$$\mathcal{H}\left(\theta\right)=E_1+\sum_k\varepsilon_a\left(k\right)a_k^+a_k+\sum_k\varepsilon_b\left(k\right)b_k^+b_k$$

где $\varepsilon_a\left(k\right)$ и $\varepsilon_b\left(k\right)$ - спектры магнонов, имеющие в общем случае следующий вид:

$$\varepsilon_a^2\left(k\right)=\left\{E_0-E_1+J_k\left(1+\sin2\alpha\right)\right\}\left\{E_0-E_1+J_k\left(1-\sin2\alpha\right)\right\} \tag{1.20}$$

$$\varepsilon_b\left(k\right)=\left(E_{-1}-E_1\right) \tag{1.21}$$

Легко видеть, что выражение (1.21) описывает бездисперсионное локализованное возбуждение, а (1.20) – спиновую волну или спектр магнонов. Указанные выше спектры магнонов получены в самом общем виде для произвольных соотношений между материальными параметрами системы в любом фазовом состоянии. Однако интересным будет определить спектры в конкретных состояниях, определенных в конце предыдущего пункта, что позволит также, найти линии их устойчивости.

В случае ферромагнитного фазового состояния ($J_0 \gg \beta,\beta_{zx},\left\langle S^z\right\rangle\approx1$), получим, что выражения для спектров элементарных возбуждений с учетом выражений (1.11) и (1.12) принимают следующий вид:

$$\varepsilon_a^2(k) = \left\{ 2J_0 - \frac{1}{4}\left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2}\right) + \left[J_0 - \frac{1}{8}\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2}\right)\right]\frac{k^2}{2} \right\} \times$$
$$\times \left\{ 2J_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2} + \left[J_0 + \frac{1}{8}\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2}\right)\right]\frac{k^2}{2} \right\} \qquad (1.22)$$

$$\varepsilon_b(k) = 2J_0 \qquad (1.23)$$

Как было сказано ранее (1.23) определяет бездисперсионную ветвь магнонов. Следовательно, фазовый переход из ферромагнитного состояния будет происходить по низкочатотной ветви спектра магнонов (1.22). Причем, линию устойчивости ферромагнитного состояния легко определить из условия обращения в нуль энергетической щели низкочастотной ветви спектра (1.22):

$$\left\{ 2J_0 - \frac{1}{4}\left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2}\right) \right\} \times \left\{ 2J_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2} \right\} = 0 \qquad (1.24)$$

Решая уравнение (1.24) получим, что линия устойчивости углового ферромагнитного состояния определяется следующим соотношением между материальными параметрами:

$$\beta_{zx}^{УФМ} = 2\sqrt{4J_0^2 - \beta J_0} \qquad (1.25)$$

Рассмотрим спектры (1.20) и (1.21) в случае реализации квадрупольного состояния ($J_0 \gg \beta, \beta_{zx}, \langle S^z \rangle = 0$). Очевидно, что спектры элементарных возбуждений (1.20) и (1.21) примут простой вид, т.к. обменное взаимодействие в квадрупольном состоянии проявляется лишь динамически. В результате получим следующие выражения для магнонных спектров:

$$\varepsilon_a^2(k) = \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2} \times \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2} + 2J_0 + J_0 k^2 \right\} \qquad (1.26)$$

$$\varepsilon_b(k) = \frac{\beta}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2} \qquad (1.27)$$

Как и в случае ферромагнитного состояния, равенство (1.26) определяет дисперсионную низкочастотную ветвь спектра, а (1.27) – бездисперсионное локализованное возбуждение. Соответственно фазовый переход из квадрупольного состояния будет идти по низкочастотной ветви спектра, и тогда равенство нулю энергетической щели спектра дает следующее уравнение:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2+4\beta_{zx}^2}\left\{2J_0+\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2+4\beta_{zx}^2}\right\}=0 \tag{1.28}$$

решением которого является значение константы наклонной анизотропии, определяющее линию устойчивости квадрупольного состояния:

$$\beta_{zx}^{КУ}=\frac{1}{2}\sqrt{16J_0^2-\beta^2} \tag{1.29}$$

Таким образом, можно построить фазовую диаграмму исследуемого ферромагнетика (рис. 1.3). Из диаграммы следует, что линия потери устойчивости УФМ фазы находится выше линии потери устойчивости КУ фазы, что характерно для фазового перехода первого рода. То есть фазовый

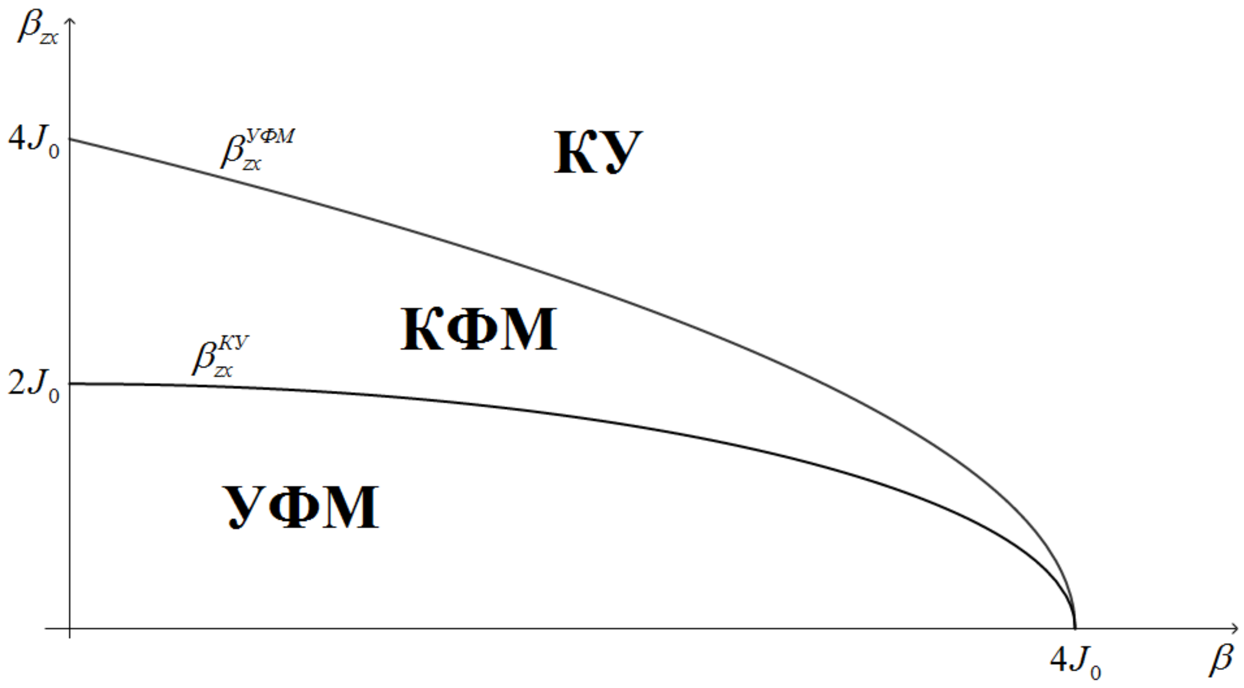

Рис. 1.3. Фазовая диаграмма ферромагнетика с конкурирующими анизотропиями

переход между этими фазовыми состояниями проходит через некоторое промежуточное состояние, в котором одновременно сосуществуют тензорный и векторный параметры порядка. Как было отмечено ранее такое состояние называется квадрупольно-ферромагнитным. Причем, как видно из фазовой диаграммы, область существования такого промежуточного состояния сильно зависит от соотношения между константами легкоплоскостной и наклонной анизотропий. Так, при $\beta_{zx} > \beta$ область существования КФМ фазы значительно больше, чем при $\beta_{zx} < \beta$. Более того, в случае равенства нулю константы наклонной легкоосной анизотропии β_{zx}, линии устойчивости ферромагнитного и квадрупольного состояний совпадают, то есть фазовый переход происходит без перехода в промежуточное состояние. Такое поведение соответствует вырожденному фазовому переходу первого рода.

Также, для полноты картины определим поведение спектров элементарных возбуждений в этом промежуточном состоянии:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a^2(k) = &\left\{2J_0 - \frac{1}{4}\left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2}\right) + \left[J_0 - \frac{1}{8}\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2}\right)\right]\frac{k^2}{2}\right\}\times \\ &\times\left\{2J_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2} + \left[J_0 + \frac{1}{8}\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta_{zx}^2}\right)\right]\frac{k^2}{2}\right\}\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\varepsilon_b(k) = 2J_0 \tag{1.31}$$

Сравнивая спектры элементарных возбуждений, легко видеть, что выражения (1.30) и (1.31) для КФМ фазы в точности совпадают с выражениями (1.22) и (1.23) для УФМ фазы. Чтобы объяснить такое поведение системы, определим линию фазового перехода между УФМ и КУ состояниями из условия равенства свободных энергий $F_{УФМ} = F_{КУ}$. Поскольку нижайшим энергетическим уровнем всегда остается E_1, то вид свободной энергии в обоих состояниях будет одинаковым, а отличаться будет только параметр порядка $\left\langle S^z \right\rangle$. Таким образом линия фазового перехода будет определяться лишь равенством параметров порядка в указанных выше состояниях:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{B_2^2(\theta_0)}{J_0}\right)^2} = 0 \tag{1.32}$$

Решая уравнение (1.32), получим:

$$\beta_{zx}^{ФП} = 2\sqrt{4J_0^2 - \beta J_0}, \qquad (1.33)$$

что в точности совпадает с линией устойчивости угловой ферромагнитной фазы. Это означает, что ферромагнитное состояние теряет устойчивость на линии фазового перехода, в которой векторный параметр порядка становится равным нулю. Такое поведение системы и объясняет тот факт, что выражения (1.30) и (1.31) определяющие спектры элементарных возбуждения в промежуточном квадрупольно-ферромагнитном состоянии эквиваленты спектрам (1.22) и (1.23).

Основные результаты первого раздела

1. Впервые показано, что в магнетике со сложной одноионной анизотропией (легкоплоскостной и наклонной) возможна реализация как ферромагнитного состояния с равновесной ориентацией магнитного момента, определяемой соотношением между константами одноионных анизотропий, так и тензорное упорядоченное состояние с равным нулю средним значением намагниченности на узле – квадрупольное упорядочение. Реализация этих состояний определяется соотношением между обменным интегралом и константами одноионных анизотропий.
2. При энергии одноионной анизотропии превосходящей энергию обменного взаимодействия, реализуется состояние с нулевым значением намагниченности на узле, но отличными от компонентами тензора квадрупольного момента. Данное состояние описывается тензорным параметром порядка. Причем геометрическим образом этого состояния в спиновом пространстве является одноосный эллипсоид, с главной осью, лежащей в плоскости ZOY. Это фазовое состояние называется квадрупольным (КУ).
3. Фазовый переход между угловой ферромагнитной и квадрупольной фазами является фазовым переходом первого рода. При этом, существует промежуточное квадрупольно-ферромагнитное состояние (КФМ), в котором тензорный и векторный параметры порядка сосуществуют. При

этом область существования КФМ состояния зависит от соотношений между константами одноионных анизотропий, а при равенстве нулю константы наклонной анизотропии, линии устойчивости совпадают и фазовый переход становится вырожденным переходом первого рода.

Раздел 2. Влияние механических граничных условий на свойства ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями

Хорошо известно, что причина возникновения в магнитоупорядоченных системах одноионной анизотропии – это спин-орбитальное взаимодействие. Однако, одноионная анизотропия не вляется единственным релятивистским взаимодействием, обусловленным спин-орбитальным взаимодействием. Благодаря спин-орбитальному взаимодействию в магнетиках также возникает магнитоупругое взаимодействие, которое определяет связь механических характеристик системы (упругих, акустических, стрикционных) с магнитными [85]. Кроме того, спин-решеточное взаимодействие существенно влияет на поведение систем при магнитных фазовых переходах [16, 87, 93, 202], что приводит к гибридизации упргуих и магнитоупругих возбуждений и возбуждению связанных магнитоупругих волн. Именно это гибридизованное возбуждение и определяет динамику системы в окрестности переориентационных фазовых переходах, т.е. в окрестности переориентационных переходов мягкой модой является поперечно поляризованная квазиакустическая ветвь, а в спектре квазимагнонов возникает магнитоупругая щель. Кроме того, магнитоупругое взаимодействие необходимо учитывать при анализе экспериментальных результатов, что связанно с наложением на систему механических граничных условий, которые определяют структуру спонтанных деформаций магнитоупорядоченного кристалла. Структура и величина спонтанных деформаций влияет, в свою очередь, как на динамические, так и на термодинамические характеристики системы, а, следовательно, и на результаты эксперимента. Ряд авторов обращали внимание на важность учета механических граничных условий, однако в настоящее время данный вопрос недостаточно изучен [106-108, 203].

В **первом подразделе** мы сформулировали и описали модель исследуемой системы, определили механические граничные условия, решили одноузельную задачу в общем виде.

Во **втором подразделе** определены фазовые состояния, исследованы статические и динамические свойства исследуемой системы, получены спектры квазимагнонов и квазифононов для случая малых значений анизотропий.

В **третьем подразделе** определены фазовые состояния, исследованы статические и динамические свойства исследуемой системы, получены спектры квазимагнонов и квазифононов для случая больших значений анизотропий.

2.1. Модель жестко закрепленного полубесконечного ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной анизотропиями.

Рассмотрим магнетик со спином магнитного иона равным единице ($S=1$), зафиксированный по плоскости ZOY (рис. 2.1). Так как на систему наложены жесткие механические граничные условия, то необходимо учесть влияние магнитоупругого взаимодействия. В нашем случае упругие деформации вдоль осей OY и OZ отсутствуют ($u_z = u_y = 0$). Такие механические граничные условия соответствуют пластине закрепленной в плоскости ZOY, то есть размер пластины вдоль оси перпендикулярной плоскости закрепления должен быть значительно меньше размеров пластины в плоскости закрепления. Однако, поскольку никаких ограничений на размеры пластины в плоскости ZOY нет, мы можем считать ее бесконечной ($-\infty < Y < +\infty, \quad -\infty < Z < +\infty$). Следовательно, размер пластины вдоль оси OX также может достигать больших размеров ($0 < X < +\infty$), что соответствует случаю полубесконечного пространства. Выбор таких граничных условий обусловлен тем, что в плоскостях ZOX и XOY действует одноионная анизотропия приводящая к возникновению магнитоупорядоченных состояний с нулевой намагниченностью. Поэтому в этих плоскостях механические граничные условия не накладываются, чтобы влияние легкоплоскостной и наклонной анизотропий было максимальным.

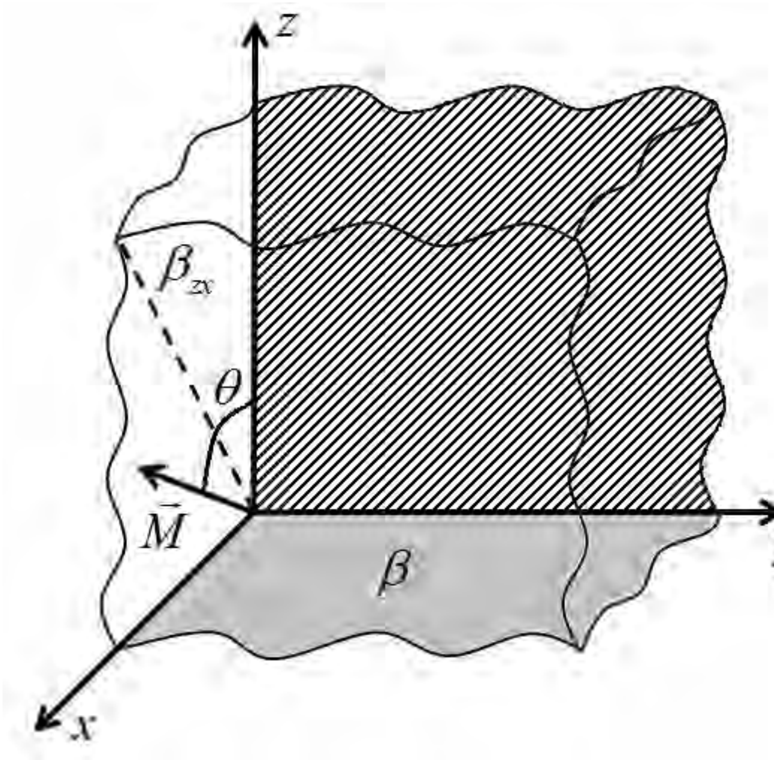

Рис. 2.1. Геометрия исследуемой модели

Таким образом, гамильтониан вышеописанной магнитной системы определяется выражением:

$$\begin{gathered}\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{n,n'} J_{nn'}\vec{S}_n\vec{S}_{n'} + \beta\sum_n (S_n^z)^2 - \beta_{zx}\sum_n \left(S_n^z S_n^x + S_n^x S_n^z\right) + \\ +\nu\sum_n \left\{u_{xx}\left(S_n^x\right)^2 + u_{xy}\left(S_n^x S_n^y + S_n^y S_n^x\right) + u_{zx}\left(S_n^z S_n^x + S_n^x S_n^z\right)\right\} + \\ +\int d\vec{r}\left\{\frac{\lambda+\eta}{2}u_{xx}^2 + \eta\left(u_{xy}^2 + u_{zx}^2\right)\right\}\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $J_{nn'}$ - обменный интеграл, $\vec{S}_n$ - спиновый оператор в узле n, β - константа легкоплоскостной анизотропии с базисной плоскостью XOY, β_{zx} - константа наклонной анизотропии действующей в плоскости XOZ, ν - константа магнитоупругой связи, u_{ij} - компоненты тензора упругих деформаций, λ и η -

упругие модули. Как и ранее, мы будем исследовать систему в области низких температур ($T \ll T_C$, где T_C – температура Кюри).

Так как обменное взаимодействие является изотропным, то направление ориентации вектора намагниченности определяется влиянием одноионной анизотропии. Поскольку энергия одноионной анизотропии много больше энергии магнитоупругой связи, то вектор намагниченности будет ориентрован в плоскости XOZ под некоторым равновесным углом θ к оси OZ, вследствие конкуренции одноионных анизотропий (рис 2.1). Дальнейшее рассмотрение системы будем проводить в рамках приближения среднего поля. Выделяя среднее поле $\left\langle S^z \right\rangle$, получим одноузельный гамильтониан, с которым впоследствии решается одноузельная задача, позволяющая определить энергетические уровни и волновые функции магнитного иона. Для упрощения дальнейших вычислений удобно перейти в систему координат связанную с магнитным моментом магнитного иона. То есть необходимо сделать унитарное преобразование $U(\theta) = \prod_n \exp\left[i\theta S_n^y\right]$, описывающее поворот системы координат на угол θ вокруг оси OY. Таким образом, в новой системе координат магнитный момент будет ориентирован вдоль оси OZ, а одноузельный гамильтониан преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0(\theta) = -\bar{H}\sum_n S_n^z + B_2^0(\theta)\sum_n \left(S_n^z\right)^2 + B_2^2(\theta)\sum_n O_{2n}^2 + B_2^{xz}(\theta)\sum_n O_{2n}^{xz} + \\ + B_2^{xy}(\theta)\sum_n O_{2n}^{xy} + B_2^{yz}(\theta)\sum_n O_{2n}^{yz} + 2B_2^2(\theta),\end{aligned} \qquad (2.2)$$

где $\bar{H} = J_0 \left\langle S^z \right\rangle$, $B_2^{ij}(\theta)$ - компоненты тензора эффективной анизотропии:

$$
\begin{aligned}
&B_2^0(\theta)=\frac{1}{8}\left\{(\beta+2\nu u_{xx})+3(\beta-2\nu u_{xx})\cos 2\theta-3(2\beta_{xz}-4\nu u_{zx})\sin 2\theta\right\};\\
&B_2^2(\theta)=\frac{1}{8}\left\{(\beta+2\nu u_{xx})-(\beta-2\nu u_{xx})\cos 2\theta+(2\beta_{xz}-4\nu u_{zx})\sin 2\theta\right\};\\
&B_2^{xz}(\theta)=-\frac{1}{4}\left\{(\beta-2\nu u_{xx})\sin 2\theta+(2\beta_{xz}-4\nu u_{zx})\cos 2\theta\right\};\\
&B_2^{xy}(\theta)=\nu u_{xy}\cos\theta;\quad B_2^{yz}(\theta)=\nu u_{xy}\sin\theta;
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Аналогично ранее проведенным преобразованиям перепишем одноузельный гамильтониан (2.2) в терминах операторов Хаббарда следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_0(\theta)=\left\{-\bar{H}+B_2^0(\theta)+2B_2^2(\theta)\right\}X^{11}+2B_2^0(\theta)X^{00}+\\
&+\left\{\bar{H}+B_2^0(\theta)+2B_2^2(\theta)\right\}X^{-1-1}+\left\{B_2^2(\theta)-iB_2^{xy}(\theta)\right\}X^{1-1}+\\
&+\left\{B_2^2(\theta)+iB_2^{xy}(\theta)\right\}X^{-11}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{B_2^{xz}(\theta)-iB_2^{yz}(\theta)\right\}\left(X^{10}-X^{0-1}\right)+\\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{B_2^{xz}(\theta)+iB_2^{yz}(\theta)\right\}\left(X^{01}-X^{-10}\right)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Для диагонализации гамильтониана (2.4) воспользуемся описанным в первом разделе методом диагонализации многоуровневых гамильтонианов. В нашем случае, недиагональные амплитуды гамильтониана (2.4) являются комплексными, в результате чего параметры унитарных преобразований также являются комплексными. Однако в силу свойств симметрии одноузельного гамильтониана ($V_{10}=V_{01}^*=-V_{0-1}=-V_{-10}^*$) количество унитарных преобразований вышеуказанного вида сокращается до двух: $U_{1-1}(A)$ и $U_{10}(\Delta)$. Решая систему уравнений, полученную из обращения в нуль недиагональных амплитуд, получим:

$$
\operatorname{tg} 2|A| = -\frac{\sqrt{\left[B_2^2(\theta)\right]^2 + \left[B_2^{xy}(\theta)\right]^2}}{\bar{H}}; \quad \arg A = -\operatorname{arctg}\frac{B_2^{xy}(\theta)}{B_2^2(\theta)};
$$

$$
\operatorname{tg} 2|\Delta| = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}\left[\chi - B_2^0(\theta)\right]} \times \Big\{\left[B_2^{zx}(\theta)\right]^2\left[\chi - B_2^2(\theta)\right] +
$$

$$
+\left[B_2^{zy}(\theta)\right]^2\left[\chi + B_2^2(\theta)\right] + 2B_2^{zx}(\theta)B_2^{zy}(\theta)B_2^{xy}(\theta)\Big\}^{\frac{1}{2}}; \tag{2.5}
$$

$$
\arg\Delta = -\operatorname{arctg}\frac{\left(\chi + \bar{H}\right)B_2^{zy}(\theta) - B_2^{zx}(\theta)B_2^{xy}(\theta) + B_2^{zy}(\theta)B_2^2(\theta)}{\left(\chi + \bar{H}\right)B_2^{zx}(\theta) - B_2^{zx}(\theta)B_2^2(\theta) - B_2^{zy}(\theta)B_2^{xy}(\theta)}.
$$

где $\chi = \sqrt{\bar{H}^2 + \left[B_2^2(\theta)\right]^2 + \left[B_2^{xy}(\theta)\right]^2}$.

В результате таких преобразований гамильтониан (2.4) с учетом выражений (2.5) приобретает диагональный вид. При этом диагональные амплитуды определяют энергетический спектр магнитного иона:

$$
E_{1,0} = \frac{B_2^0(\theta) - \chi}{2} + 2B_2^2(\theta) \pm \frac{1}{2}\Big\{\left(B_2^0(\theta) - \chi\right)^2 +
$$

$$
+\frac{2}{\chi}\Big\{\left[B_2^{zx}(\theta)\right]^2\left[\chi + B_2^2(\theta)\right] + \left[B_2^{zy}(\theta)\right]^2\left[\chi - B_2^2(\theta)\right] + \tag{2.6}
$$

$$
+2B_2^{zx}(\theta)B_2^{zy}(\theta)B_2^{xy}(\theta)\Big\}\Big\}^{\frac{1}{2}};
$$

$$
E_{-1} = B_2^0(\theta) + 2B_2^2(\theta) + \chi.
$$

Из (2.6) видно, что энергетический уровень E_1 всегда остается нижайшим при любых соотношениях между материальными параметрами системы, а значит он определяет энергию основного состояния системы. В силу того, что мы проводим исследование системы в низкотемпературном диапазоне, нижайший энергетический уровень E_1 также определяет плотность свободной энергии F системы:

$$F=\frac{B_2^0(\theta)-\chi}{2}+2B_2^2(\theta)-\frac{1}{2}\Big\{\Big(B_2^0(\theta)-\chi\Big)^2+$$
$$+\frac{2}{\chi}\Big\{\Big[B_2^{zx}(\theta)\Big]^2\Big[\chi+B_2^2(\theta)\Big]+\Big[B_2^{zy}(\theta)\Big]^2\Big[\chi-B_2^2(\theta)\Big]+ \qquad (2.7)$$
$$+2B_2^{zx}(\theta)B_2^{zy}(\theta)B_2^{xy}(\theta)\Big\}\Big\}^{\frac{1}{2}}+F_{упр}$$

Как известно, равновесные значения параметров системы легко определить из условия минимума плотности свободной энергии (2.7). Однако учет влияния магнитоупругого взаимодействия приводит к тому, что условия минимума плотности свободной энергии приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\theta}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial F}{\partial u_{ij}}=0,\end{cases} \qquad (2.8)$$

которую невозможно решить в общем случае. Поэтому для решения системы (2.8), мы рассмотрим два предельных случая: случай слабоанизотропного ферромагнетика и случай сильноанизотропного ферромагнетика.

2.2. Статические и динамические свойства жестко закрепленного слабоанизотропного ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной анизотропиями.

Рассмотрим случай слабоанизотропного ферромагнетика, то есть случай, когда энергия обменного взаимодействия значительно превышает энергию одноионной анизотропии ($J_0 \gg \beta, \beta_{zx} \gg \nu$). В этом случае система уравнений (2.8) значительно упрощается, и ее решение определяет равновесное значение угла ориентации магнитного момента:

$$\operatorname{tg}2\theta_0=-\frac{2\beta_{zx}-4\nu u_{zx}}{\beta-2\nu u_{xx}} \qquad (2.9)$$

а также компоненты тензора спонтанных деформаций

$$u_{xx}^{(0)} = -\frac{\nu}{4(\lambda+\eta)}\left(3+\frac{\beta}{\sqrt{4\beta_{zx}^2+\beta^2}}\right);$$
$$u_{zx}^{(0)} = -\frac{\nu}{2\eta}\frac{\beta_{zx}}{\sqrt{4\beta_{zx}^2+\beta^2}}; \quad u_{xy}^{(0)} = 0. \tag{2.10}$$

Очевидно, что компоненты тензора спонтанных деформаций зависят от соотношений между константами легкоплоскостной и наклонной анизотропий (рис. 2.2). Как видно из графика, влияние наклонной анизотропии приводит к возникновению дополнительной эффективной анизотропии в плоскости ZOX, обусловленной магнитоупругим взаимодействиям.

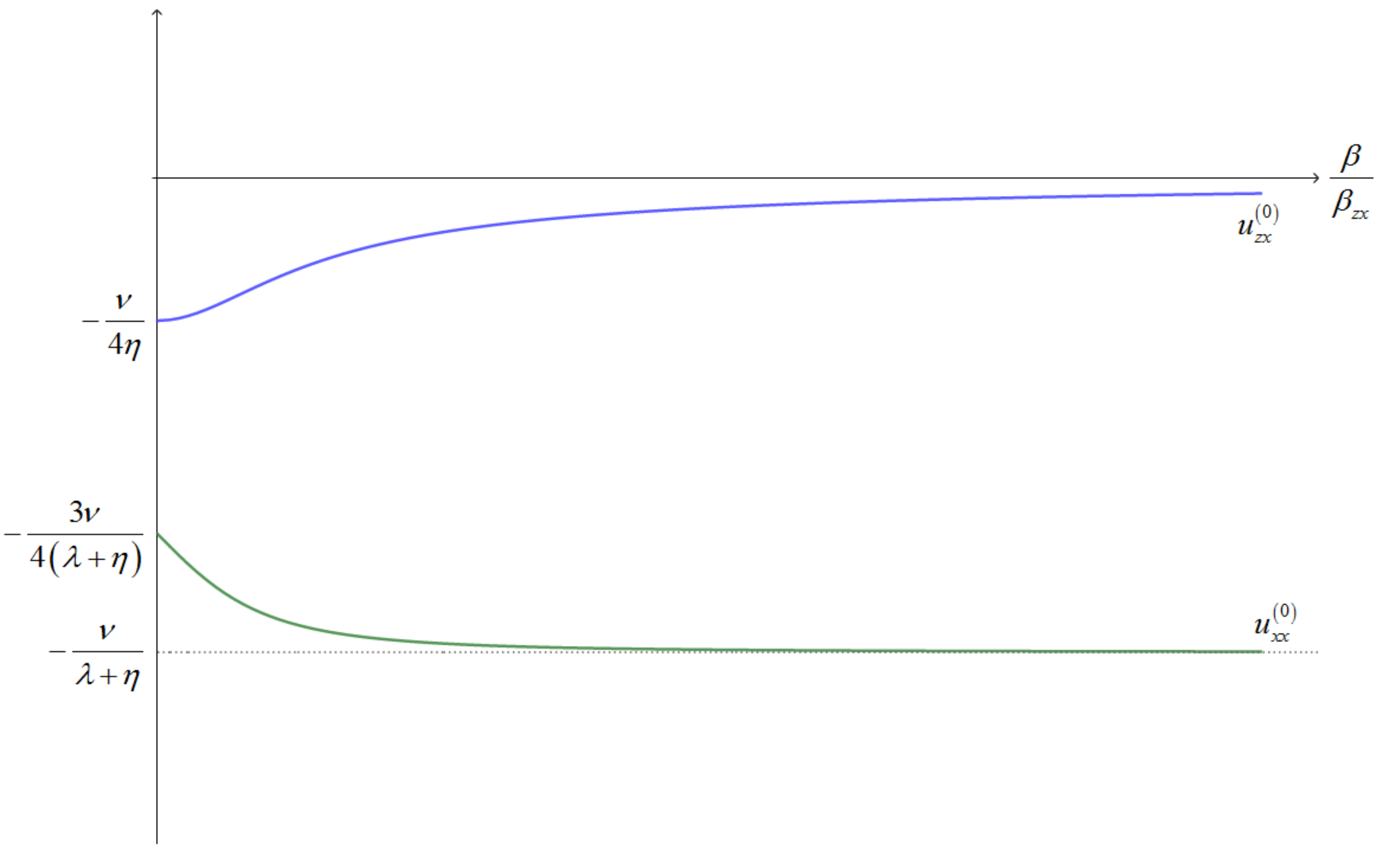

Рис. 2.2. Зависимость компонент тензора спонтанных деформаций от соотношения констант одноионных легкоплоскостной и наклонной анизотропий

Легко показать, что с учетом выражений (2.9) и (2.10) компоненты тензора эффективной анизотропии (2.3) значительно упрощаются и приобретают следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&B_2^0\left(\theta_0\right)=\frac{1}{8}\left\{\left(\beta+2\nu u_{xx}^{(0)}\right)-3\sqrt{\left(\beta-2\nu u_{xx}^{(0)}\right)^2+\left(2\beta_{xz}-4\nu u_{zx}^{(0)}\right)^2}\right\};\\
&B_2^2\left(\theta_0\right)=\frac{1}{8}\left\{\left(\beta+2\nu u_{xx}^{(0)}\right)+\sqrt{\left(\beta-2\nu u_{xx}^{(0)}\right)^2+\left(2\beta_{xz}-4\nu u_{zx}^{(0)}\right)^2}\right\};\\
&B_2^{xz}\left(\theta_0\right)=B_2^{xy}\left(\theta_0\right)=B_2^{yz}\left(\theta_0\right)=0;
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Из (2.11) видно, что в тензор эффективной анизотропии имеет диагональный вид, и описывается двумя константами эффективной анизотропии. Это означает, что, как и в предыдущем разделе, поведение исследуемой магнитоупорядоченной системы с конкурирующими анизотропиями сводится к поведению двухосного ферромагнетика, а влияние магнитоупругого взаимодействия на статические свойства заключается в перенормировке констант эффективной анизотропии $B_2^0\left(\theta_0\right)$ и $B_2^2\left(\theta_0\right)$.

Также, учет равновесного значения угла ориентации магнитного момента (2.9) и значения компонент тензора спонтанных деформаций (2.10) приводят к тому, что унитарное преобразование $U_{10}\left(\Delta\right)$ никак не влияет на систему, а значит, достаточно лишь одного унитарного преобразования $U_{1-1}\left(A\right)$, для приведения гамильтониана (2.4) к диагональному виду. При этом уровни энергии магнитного иона имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&E_{1,-1}=\mp\chi+B_2^0\left(\theta_0\right)+2B_2^2\left(\theta_0\right);\\
&E_0=2B_2^2\left(\theta_0\right).
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Волновые функции магнитного иона определяются стандартным образом $\left|\psi\left(i\right)\right\rangle=U_{1-1}^{+}\left(A\right)\left|i\right\rangle$, и в нашем случае равны:

$$
\begin{aligned}
&\left|\psi\left(1\right)\right\rangle=\cos A\left|1\right\rangle+\sin A\left|-1\right\rangle;\\
&\left|\psi\left(0\right)\right\rangle=\left|0\right\rangle;\\
&\left|\psi\left(-1\right)\right\rangle=-\sin A\left|1\right\rangle+\cos A\left|-1\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Тогда, построенные на базисе собственных функций операторы Хаббарда, определяющие переход магнитного иона между состояниями, связаны со спиновыми операторами следующими соотношениями:

$$S^z = \cos 2A\left(X^{11} - X^{-1-1}\right) - \sin 2A\left(X^{1-1} + X^{-11}\right);$$
$$S^+ = \sqrt{2}\cos A\left(X^{10} + X^{0-1}\right) + \sqrt{2}\sin A\left(X^{01} - X^{-10}\right); \tag{2.14}$$
$$S^- = \left(S^+\right)^+.$$

Как было указано ранее, нижайшим энергетическим уровнем является E_1, а значит, волновая функция $\left|\psi(1)\right\rangle$ определяет основное состояние магнитного иона. Тогда, с учетом выражения (2.14), легко найти среднее значение намагниченности на узле в рассматриваемом диапазоне соотношения материальных параметров системы:

$$\left\langle S^z \right\rangle = \cos 2A = \frac{\bar{H}}{\chi} \approx 1 \tag{2.15}$$

Таким образом, в исследуемом случае, система описывается векторным параметром порядка - намагниченностью, причем вышеуказанное значение параметра порядка характерно для ферромагнитного состояния. Однако в нашем случае, вектор намагниченности будет лежать под некоторым углом к оси OZ, определяемым выражением (2.9), поэтому данное состояние системы является угловым ферромагнитным (УФМ).

Дальнейшей нашей задачей будет получение спектров элементарных возбуждений, позволяющих определить динамические свойства, а также вычислить линию устойчивости исследуемого фазового состояния. Для этого представим компоненты тензора упругих деформаций в виде $u_{ij} = u_{ij}^{(0)} + u_{ij}^{(1)}$, где $u_{ij}^{(0)}$ - спонтанные деформации определяющиеся соотношениями (2.10), а $u_{ij}^{(1)}$ - динамическая часть, описывающая колебания узлов кристаллической решетки, то есть упругие волны. Тогда, выделяя в гамильтониане (2.1) слагаемые, пропорциональные динамической части компонент тензора упругих деформаций, и квантуя их стандартным образом [184]:

$$u_{ij}^{(1)} = \frac{i}{2}\sum_{\varphi,\lambda}\frac{e^{i\vec{q}\vec{n}}}{\sqrt{2mN\omega_\varphi\left(q\right)}}\left(e_\varphi^i\left(q\right)q_j + e_\varphi^j\left(q\right)q_i\right)\left(b_{q,\varphi} + b_{-q,\varphi}^+\right), \qquad (2.16)$$

получим гамильтониан описывающий трансформацию магнонов в фононы и обратно:

$$\mathcal{H}_{tr} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{i,j,\mathrm{q},\\ \varphi,\mathrm{n}}}\left(b_{q,\varphi} + b_{-q,\varphi}^+\right)T_n^{ij}\left(q,\varphi\right)X_n^{ij}. \qquad (2.17)$$

В выражениях (2.16) и (2.17) введены обозначения: $e_\varphi^i\left(q\right)$ - проекция единичного вектора поляризации на ось i, q_i - проекция квазиимпульса на ось i, N - число узлов в кристаллической решетке, m - масса иона, $\omega_\varphi\left(q\right) = c_\varphi q$ - закон дисперсии невзаимодействующих фононов, c_φ - скорость звука φ-поляризации, $b_{-q,\phi}^+$ и $b_{q,\varphi}$ - соответствено операторы рождения и уничтожения фононов, $T_n\left(q,\varphi\right)$ - амплитуды трансформаций, вид которых приведен ниже в (2.18).

$$\begin{aligned}
&T_n^{11}(q,\varphi) = T_n^{-1-1}(q,\varphi) = \frac{i\nu}{4}T_n^0(q,\varphi)\Big\{3\left(e_{\varphi q}^x q_x + 2e_{\varphi q}^y q_y + e_{\varphi q}^z q_z\right) - \\
&-\left(e_{\varphi q}^x q_x - e_{\varphi q}^z q_z\right)\cos 2\theta + \left(e_{\varphi q}^x q_z + e_{\varphi q}^z q_x\right)\sin 2\theta\Big\}; \\
&T_n^{00}(q,\varphi) = \frac{i\nu}{2}T_n^0(q,\varphi)\Big\{e_{\varphi q}^x q_x + 2e_{\varphi q}^y q_y + e_{\varphi q}^z q_z - \\
&-\left(e_{\varphi q}^x q_x - e_{\varphi q}^z q_z\right)\cos 2\theta - \left(e_{\varphi q}^x q_z + e_{\varphi q}^z q_x\right)\sin 2\theta\Big\}; \\
&T_n^{10}(q,\varphi) = -T_n^{0-1}(q,\varphi) = \frac{i\nu}{2\sqrt{2}}T_n^0(q,\varphi)\Big\{\left(e_{\varphi q}^x q_x - e_{\varphi q}^z q_z\right)\sin 2\theta + \qquad (2.18) \\
&+\left(e_{\varphi q}^x q_z + e_{\varphi q}^z q_x\right)\cos 2\theta - i\Big[\left(e_{\varphi q}^x q_y + e_{\varphi q}^y q_x\right)\sin\theta + \left(e_{\varphi q}^z q_y + e_{\varphi q}^y q_z\right)\cos\theta\Big]\Big\}; \\
&T_n^{01}(q,\varphi) = -\Big[T_n^{10}(q,\varphi)\Big]^*; \quad T_n^{-10}(q,\varphi) = -\Big[T_n^{0-1}(q,\varphi)\Big]^*; \\
&T_n^{1-1}(q,\varphi) = \frac{i\nu}{4}T_n^0(q,\varphi)\Big\{e_{\varphi q}^x q_x - 2e_{\varphi q}^y q_y + e_{\varphi q}^z q_z + \left(e_{\varphi q}^x q_x - e_{\varphi q}^z q_z\right)\cos 2\theta -
\end{aligned}$$

$$-\left(e_{\varphi q}^{x} q_{z}+e_{\varphi q}^{z} q_{x}\right) \sin 2\theta-2i\left[\left(e_{\varphi q}^{x} q_{y}+e_{\varphi q}^{y} q_{x}\right) \cos \theta-\left(e_{\varphi q}^{y} q_{z}+e_{\varphi q}^{z} q_{y}\right) \sin \theta\right]\Big\};$$

$$T_n^{-11}(q,\varphi)=-\left[T_n^{1-1}(q,\varphi)\right]^*, \quad T_n^{0}(q,\varphi)=\frac{e^{i\mathbf{qn}}}{\sqrt{2m\omega_\varphi(q)}}.$$

Следующим шагом в исследовании динамики системы является определение спектров элементарных возбуждений. Известно, что спектры могут быть определены как полюса функции Грина [177],

$$G^{\alpha\alpha'}\left(n,\tau,n',\tau'\right)=-\left\langle \hat{T}\tilde{X}_n^{\alpha}\left(\tau\right)\tilde{X}_{n'}^{\alpha'}\left(\tau'\right)\right\rangle$$

где $\hat{T}$ - оператор Вика, $\tilde{X}_n^{\alpha}\left(\tau\right)=e^{\mathcal{H}\tau}X_n^{\alpha}e^{-\mathcal{H}\tau}$ - операторы Хаббарда в представлении Гейзенберга, $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_{\text{int}}+\mathcal{H}_{tr}$. Также для упрощения были введены следующие обозначения корневых векторов:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1=\alpha\left(1,0\right)=\left(1,-1,0\right) & \alpha_2=\alpha\left(0,1\right)=\left(-1,1,0\right)\\
\alpha_3=\alpha\left(0,-1\right)=\left(0,1,-1\right) & \alpha_4=\alpha\left(-1,0\right)=\left(0,-1,1\right)\\
\alpha_5=\alpha\left(1,-1\right)=\left(1,0,-1\right) & \alpha_6=\alpha\left(-1,1\right)=\left(-1,0,1\right)
\end{array}$$

Гамильтониан трансформации магнонов в фононы и обратно в терминах операторов Хаббарда $\mathcal{H}_{tr}$ определяется выражением (2.17), одноузельный гамильтониан имеет диагональный вид $\mathcal{H}_0=\sum_i E_i X^{ii}$, а гамильтониан взаимодействия можно переписать в виде [176]:

$$\mathcal{H}_{\text{int}}=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{n,n'\\ \alpha,\alpha'}}\left\{\vec{c}\left(\alpha\right),\hat{A}_{nn'}\vec{c}\left(\alpha'\right)\right\}X_n^{\alpha}X_n^{\alpha'}, \tag{2.19}$$

где вектор $\vec{c}\left(\alpha\right)=\begin{pmatrix}\gamma^{\parallel}\left(\alpha\right) & \gamma^{\perp}\left(\alpha\right) & \left(\gamma^{\perp}\left(\alpha\right)\right)^*\end{pmatrix}$ компоненты которого определяются из соотношений между спиновыми операторами и операторами Хаббарда (2.14), формально выписанными следующим образом:

$$S_n^z=\sum_M \Gamma^{\parallel}\left(M\right)X_n^{MM}+\sum_\alpha \gamma^{\parallel}\left(\alpha\right)X_n^{\alpha}; \quad S_n^+=\sum_M \Gamma^{\perp}\left(M\right)X_n^{MM}+\sum_\alpha \gamma^{\perp}\left(\alpha\right)X_n^{\alpha};$$

$$S_n^-=\sum_M \left(\Gamma^{\perp}\left(M\right)\right)^* X_n^{MM}+\sum_\alpha \left(\gamma^{\parallel}\left(-\alpha\right)\right)^* X_n^{\alpha}$$

а матрица $\widehat{A}_{nn'}$ имеет вид:

$$\widehat{A}_{nn'} = J_{nn'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Таким образом, спектры связанных магнитоупругих волн определяются дисперсионным уравнением, являющееся аналогом уравнения Ларкина с учетом магнитоупругой связи, которое справедливо для всего интервала температур, в котором магнитоупорядоченное состояние существует, за исключением области флуктуаций. Более того, уравнение Ларкина имеет смысл во всем диапазоне изменения соотношений материальных констант.

Проведем анализ решения дисперсионного уравнения в УФМ фазе с учетом выражений (2.18) – (2.20). Для упрощения дальнейших вычислений предположим, что волновой вектор $\vec{k}$ ориентирован в базисной плоскости, перпендикулярно плоскости закрепления пластины, т.е. $\vec{k} \parallel OX$. В этом случае вектор поляризации в имеет компоненты $\vec{e} = \left(e_l^x, e_\tau^y, e_t^z\right)$. Тогда, спектры квазифононов для рассматриваемой геометрии имеют вид:

$$\begin{aligned}
\omega_1^2(k) &= \omega_t^2(k) \frac{\left(E_0 - E_1 + J_k + J_k \sin 2A\right)\left(1 + \dfrac{a_0 \sin^2 2\theta}{2\left[E_1 - E_{-1}\right]}\right) + a_0 \cos^2 2\theta}{E_0 - E_1 + J_k + J_k \sin 2A}; \\
\omega_2^2(k) &= \omega_l^2(k) \frac{\left(E_0 - E_1 + J_k + J_k \sin 2A\right)\left(1 + \dfrac{a_0 \left[1 + \cos 2\theta\right]^2}{2\left[E_1 - E_{-1}\right]}\right) + a_0 \sin^2 2\theta}{E_0 - E_1 + J_k + J_k \sin 2A}; \\
\omega_3^2(k) &= \omega_\tau^2(k) \frac{\left(E_0 - E_1 + J_k + J_k \sin 2A\right)\left(1 + \dfrac{a_0 \left[1 + \cos 2\theta\right]}{2\left[E_1 - E_{-1}\right]}\right) + \dfrac{a_0\left(1 - \cos 2\theta\right)}{2}}{E_0 - E_1 + J_k + J_k \sin 2A}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

где $a_0 = \dfrac{\nu^2}{2\eta}$ - параметр магнитоупругой связи. При этом спектр квазимагнонов имеет две ветви возбуждения:

$$\varepsilon_a^2(k) = \{E_0 - E_1 + J_k(1+\sin 2A)\}\{E_0 - E_1 + J_k(1-\sin 2A)\} \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_b(k) = (E_{-1} - E_1) \quad (2.23)$$

Анализ квазифононых спектров (2.21) показывает, что для любого соотношения между константами одноионной анизотропии, превосходящих параметр магнитоупругого взаимодействия ($\beta, \beta_{zx} \gg a_0$), ни одна из квазиакустических ветвей возбуждения активно не взаимодействует с магнитной подсистемой, в результате чего квазифононный закон дисперсии остается линейным по волновому вектору, а влияние магнитной подсистемы приводит только к перенормировке скоростей звука. Таким образом, фазовый переход в рассматриваемой системе протекает по квазимагнонной ветви возбуждения. Выражение (2.23) описывает бездисперсионное возбуждение в системе, поэтому рассмотрим ветвь спектра (2.22), причем дальнейшее исследование будем проводить для двух предельных случаев: $\beta \gg \beta_{zx}$ и $\beta_{zx} \gg \beta$.

В случае, когда энергия наклонной анизотропии больше, чем энергия легкоплоскостной одноионной анизотропии ($\beta_{zx} \gg \beta$), перенормировка скорости звука за счет влияния магнитной подсистемы на упругую определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\omega_1^2(k) &= \omega_t^2(k)\left(1 - \frac{a_0}{4J_0}\right); \\
\omega_2^2(k) &= \omega_l^2(k)\left(1 - \frac{a_0}{4J_0} + \frac{a_0}{8J_0 + 2\beta_{zx} - \beta}\right); \\
\omega_3^2(k) &= \omega_\tau^2(k)\left(1 - \frac{a_0}{4J_0} + \frac{a_0}{8J_0 + 2\beta_{zx} - \beta}\right).
\end{aligned} \quad (2.24)$$

Дисперсионная ветвь спектра (2.22) квазимагнонов в рассматриваемом случае определяется выражением:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_a^2(k) = &\left\{2J_0 + \frac{1}{2}\sqrt{(\beta+3a_0)^2 + 4(\beta_{zx}+a_0)^2} + \right.\\
&\left. + \left(J_0 + \frac{1}{8}(\beta-3a_0) + \frac{1}{8}\sqrt{(\beta+3a_0)^2 + 4(\beta_{zx}+a_0)^2}\right)\frac{k^2}{2}\right\}\times\\
&\times\left\{2J_0 - \frac{1}{4}(\beta-3a_0) + \frac{1}{4}\sqrt{(\beta+3a_0)^2 + 4(\beta_{zx}+a_0)^2} + \right.\\
&\left. + \left(J_0 - \frac{1}{8}(\beta-3a_0) - \frac{1}{8}\sqrt{(\beta+3a_0)^2 + 4(\beta_{zx}+a_0)^2}\right)\frac{k^2}{2}\right\}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Анализ спектров квазифононов (2.24) и квазимагнонов (2.25) показывает, что влияние магнитоупругого взаимодействия сводится лишь к статической перенормировке, определяемой спонтанными деформациями (2.10). Более того, из равенства нулю энергетической щели спектра (2.25) определим линию устойчивости ферромагнитного состояния в исследуемом случае:

$$\beta_{zx}^{УФМ1} = \sqrt{16J_0^2 - 4J_0(\beta-3a_0) - 3\beta a_0} - a_0 \tag{2.26}$$

В противоположном случае, когда энергия лекгоплоскостной одноионной анизотропии превышает энергию наклонной анизотропии ($\beta \gg \beta_{zx}$), скорость звука также перенормируется за счет магнитоупругого взаимодействия:

$$\begin{aligned}
\omega_1^2(k) &= \omega_t^2(k)\left(1-\frac{a_0}{2J_0}\right);\\
\omega_2^2(k) &= \omega_l^2(k);\\
\omega_3^2(k) &= \omega_\tau^2(k)\left(1+\frac{a_0}{J_0}\right).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Ветвь (2.22) квазимагнонов, определяющих спиновую волну также статически перенормируется магнитоупругим взаимодействием:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a^2(k) = &\left\{2J_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\beta + 4a_0\right)^2 + 4\beta_{zx}^2} + \right.\\ &\left.+\left(J_0 + \frac{1}{8}\left(\beta - 4a_0\right) + \frac{1}{8}\sqrt{\left(\beta + 4a_0\right)^2 + 4\beta_{zx}^2}\right)\frac{k^2}{2}\right\}\times\\ &\times\left\{2J_0 - \frac{1}{4}\left(\beta - 4a_0\right) + \frac{1}{4}\sqrt{\left(\beta + 4a_0\right)^2 + 4\beta_{zx}^2} + \right.\\ &\left.+\left(J_0 - \frac{1}{8}\left(\beta - 4a_0\right) - \frac{1}{8}\sqrt{\left(\beta + 4a_0\right)^2 + 4\beta_{zx}^2}\right)\frac{k^2}{2}\right\}\end{aligned} \tag{2.28}$$

Тогда, равенство нулю энергетической щели спектра (2.28) приводит к уравнению, решение которого определяет линию устойчивости ферромагнитного состояния в рассматриваемой области соотношений констант анизотропий:

$$\beta_{zx}^{УФМ2} = \sqrt{16J_0^2 - 4J_0\left(\beta - 4a_0\right) - 4\beta a_0} \tag{2.29}$$

Для получения линии потери устойчивости углового ферромагнитного состояния при произвольном соотношении между константами легкоплоскостной и наклонной одноионных анизотропий проведем численный анализ, что будет в дальнейшем отмечено на фазовой диаграмме.

2.3. Статические и динамические свойства жестко закрепленного сильноанизотропного ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной анизотропиями

Теперь рассмотрим случай, когда энергия одноионной анизотропии существенно превосходит энергию обменного взаимодействия, т.е. $\beta, \beta_{zx} \gg J_0 \gg \nu$. Такое приближение, как и в случае малых анизотропий, приводит к существенному упрощению систему уравнений (2.8), позволяя вычислить значение равновесного угла ориентации магнитного момента. Более того, это значение в точности совпадает со значением равновесного угла (2.9) для случая слабоанизотропного магнетика. Такое поведение системы объясняется тем фактом, что обменное взаимодействие является изотропным.

Таким образом, угол ориентации магнитного момента определяется лишь соотношениями между константами одноионной анизотропии и компонентами тензора спонтанных деформаций, которые в рассматриваемой области соотношений материальных параметров определяются следующими выражениями:

$$u_{xx}^{(0)} = -\frac{\nu}{2(\lambda+\eta)}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{4\beta_{zx}^2+\beta^2}}\right);$$
$$u_{zx}^{(0)} = -\frac{\nu}{\eta}\frac{\beta_{zx}}{\sqrt{4\beta_{zx}^2+\beta^2}}; \quad u_{xy}^{(0)} = 0. \tag{2.30}$$

Как и в случае малых анизотропий, при различных соотношениях между энергиями наклонной и легкоплоскостной анизотропий возникает дополнительная эффективная анизотропия типа легкой оси или легкой плоскости, что изображено на рис. 2.4.

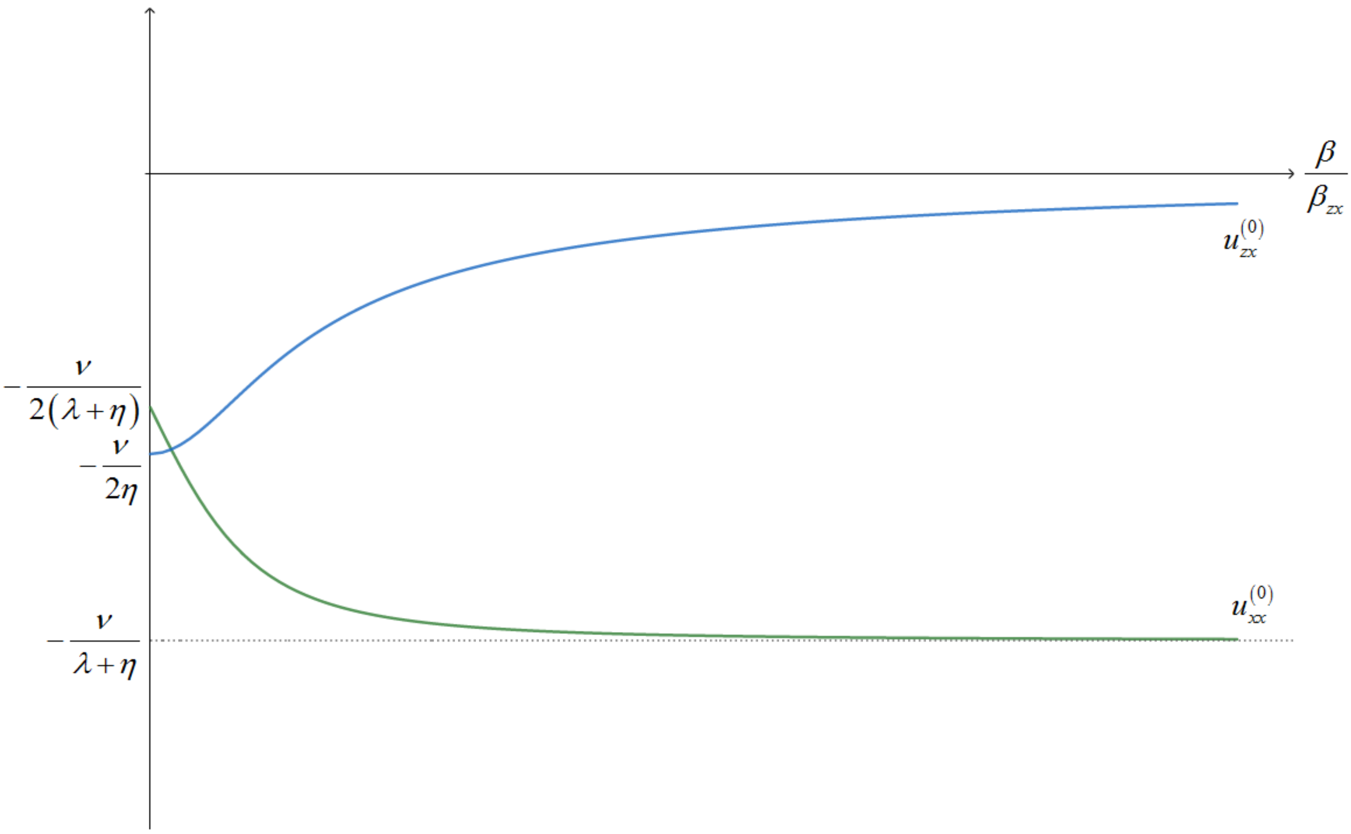

Рис. 2.3 Зависимость компонент тензора спонтанных деформаций от соотношения констант одноионных легкоплоскостной и наклонной анизотропий

Тогда, принимая во внимание выражения (2.9) и (2.30), получим, что тензор эффективной анизотропии (2.4) становится диагональным, как и в случае малой энергии спин-орбитального взаимодействия, а его компоненты определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
&B_2^0(\theta_0)=\frac{1}{8}\left\{\left(\beta+2\nu u_{xx}^{(0)}\right)-3\sqrt{\left(\beta-2\nu u_{xx}^{(0)}\right)^2+\left(2\beta_{xz}-4\nu u_{zx}^{(0)}\right)^2}\right\};\\
&B_2^2(\theta_0)=\frac{1}{8}\left\{\left(\beta+2\nu u_{xx}^{(0)}\right)+\sqrt{\left(\beta-2\nu u_{xx}^{(0)}\right)^2+\left(2\beta_{xz}-4\nu u_{zx}^{(0)}\right)^2}\right\};\\
&B_2^{xz}(\theta_0)=B_2^{xy}(\theta_0)=B_2^{yz}(\theta_0)=0;
\end{aligned}\tag{2.31}$$

В рассматриваемом диапазоне соотношений материальных параметров системы, для диагонализации одноузельного гамильтониана (2.6) достаточно лишь одного унитарного преобразования $U_{1-1}(A)$. В результате этого, спектр энергетических состояний и волновые функции магнитного иона, определяются соотношениями (2.14) и (2.15), а связь спиновых операторов с операторами Хаббарда, построенными на базисе волновых функций магнитного иона, в точности совпадает с выражением (2.16).

Поскольку, при любых соотношениях между материальными параметрами исследуемой системы, E_1 остается нижайшим энергетическим уровнем магнитного иона, а основное состояние определяется волновой функцией $\left|\psi(1)\right\rangle$, то легко вычислить среднее значение намагниченности на один узел в рассматриваемом случае сильноанизотропного магнетика:

$$\left\langle S^z\right\rangle=\cos 2A=\frac{\bar{H}}{\chi}=0 \tag{2.32}$$

Однако, компоненты тензора квадрупольных моментов отличны от нуля ($q_2^0=\left\langle O_2^0\right\rangle=1;\quad q_2^2=\left\langle O_2^2\right\rangle=-1;\quad q_2^{zx}=\left\langle O_2^{zx}\right\rangle=0$). Это означает, что в данном случае реализуется квадрупольная фаза (КУ), описывающаяся не векторным, а тензорным параметром порядка.

Как было показано ранее, для случая слабоанизотропного магнетика, представляя компоненты тензора упругих деформаций в виде суммы спонтанных деформаций (2.30) и слагаемых определяющих колебания узлов кристаллической решетки, с учетом выражения (2.16), получим гамильтониан трансформации магнонов в фононы и обратно (2.17). Однако в рассматриваемом случае сильноанизотропного магнетика, амлитуды трансформации $T_n\left(q,\varphi\right)$ имеют более простой вид:

$$
\begin{aligned}
&T_n^{11}(q,\varphi)=T_n^{-1-1}(q,\varphi)=i\nu T_n^0(q,\varphi)\left\{e_{\varphi q}^x q_x+e_{\varphi q}^y q_y+e_{\varphi q}^z q_z\right\};\\
&T_n^{00}(q,\varphi)=i\nu T_n^0(q,\varphi)\left\{e_{\varphi q}^x q_x+e_{\varphi q}^z q_z+\left(e_{\varphi q}^x q_x-e_{\varphi q}^y q_y\right)\cos 2\theta-\right.\\
&\left.-\left(e_{\varphi q}^x q_z+e_{\varphi q}^z q_x\right)\sin 2\theta\right\};\\
&T_n^{10}(q,\varphi)=T_n^{01}(q,\varphi)=\frac{i\nu}{2}T_n^0(q,\varphi)\left\{\left(e_{\varphi q}^x q_x-e_{\varphi q}^z q_z\right)\sin 2\theta+\right.\\
&\left.+\left(e_{\varphi q}^x q_z+e_{\varphi q}^z q_x\right)\cos 2\theta\right\};\\
&T_n^{0-1}(q,\varphi)=-T_n^{-10}(q,\varphi)=-\frac{\nu}{2}T_n^0(q,\varphi)\left\{\left(e_{\varphi q}^x q_y-e_{\varphi q}^y q_x\right)\sin\theta+\right.\\
&\left.+\left(e_{\varphi q}^z q_y+e_{\varphi q}^y q_z\right)\cos\theta\right\};\\
&T_n^{1-1}(q,\varphi)=-T_n^{-11}(q,\varphi)=\frac{\nu}{2}T_n^0(q,\varphi)\left\{\left(e_{\varphi q}^x q_y-e_{\varphi q}^y q_x\right)\cos\theta-\right.\\
&\left.-\left(e_{\varphi q}^z q_y+e_{\varphi q}^y q_z\right)\sin\theta\right\};\\
&T_n^0(q,\varphi)=\frac{e^{i\mathbf{qn}}}{\sqrt{2m\omega_\varphi(q)}}.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Таким образом, с учетом того, что в терминах операторов Хаббарда одноузельный гамильтониан принимает диагональный вид, гамильтониан трансформации определяется выражением (2.16) с амплитудами трансформации (2.33), а гамильтониан взаимодействия можно представить в виде (2.19) и (2.20). Полюса функции Грина имеют смысл спектров элементарных возбуждений, позволяющих определить динамические свойства исследуемой модели.

Учитывая значения уровней энергии (2.12), параметров порядка (2.32) и амплитуд трансформации (2.33), анализ решения дисперсионного уравнения при ориентации волнового вектора $\vec{k}$ в базисной плоскости вдоль оси OX показывает, что в длинноволновом пределе спектры квазифононов остаются линейными по волновому вектору:

$$\omega_1(k) = \omega_t(k); \quad \omega_2(k) = \omega_l(k); \quad \omega_3(k) = \omega_\tau(k), \tag{2.34}$$

Причем, скорость звука не перенормируется в отличие от ситуации, рассмотренной в УФМ фазе, что связано с равенством нулю намагниченности на узле и, как результат, отсутствием какого-либо влияния магнитной подсистемы на динамику квазиакустических возбуждений. Таким образом, в точке фазового перехода размягчается спектр квазимагнонов, определяемый, в общем виде, формулами (2.22) и (2.23).

Если энергия наклонной анизотропии значительно превышает энергию лекгоплоскостной анизотропии ($\beta_{zx} \gg \beta$), дисперсионная ветвь спектра (2.22), определяется выражением:

$$\begin{gathered}\varepsilon_a^2(k) = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\beta + 2a_0\right)^2 + 4\left(\beta_{zx} + 2a_0\right)^2} \times \\ \times\left\{2J_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\beta + 2a_0\right)^2 + 4\left(\beta_{zx} + 2a_0\right)^2} + J_0 k^2\right\}\end{gathered} \tag{2.35}$$

Таким образом, аналогично угловому ферромагнитному состоянию, влияние магнитоупругого взаимодействия приводит лишь к статической перенормировке спектра квазимагнонов, величина которой определяется спонтанными деформациями (2.30). Тогда, равенство нулю энергетической щели спектра (2.35) задает уравнение, решением которого является линия устойчивости квадрупольного фазового состояния в исследуемом предельном случае:

$$\beta_{zx}^{КУ1} = \frac{1}{2}\sqrt{16J_0^2 - \left(\beta + 3a_0\right)^2} - 2a_0 \tag{2.36}$$

Если же энергия легкоплоскостной одноионной анизотропии превышает энергию наклонной анизотропии ($\beta \gg \beta_{zx}$), дисперсионная ветвь квазимагнонов (2.22), определяющая спиновую волну, также статически перенормируется магнитоупругим взаимодействием и имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a^2(k) &= \frac{1}{2}\sqrt{(\beta + 4a_0)^2 + 4\beta_{zx}^2} \times \\ &\times \left\{ 2J_0 + \frac{1}{2}\sqrt{(\beta + 4a_0)^2 + 4\beta_{zx}^2} + J_0 k^2 \right\} \end{aligned} \tag{2.37}$$

Тогда, линию устойчивости квадрупольного фазового состояния в рассматриваемой области соотношения материальных параметров легко определить из равенства нулю энергетической щели спектра (2.39):

$$\beta_{zx}^{КУ2} = \frac{1}{2}\sqrt{16J_0^2 - (\beta + 4a_0)^2} \tag{2.38}$$

Для произвольного соотношения между константами одноионной анизотропии получить линию потери устойчивости можно проведя численный анализ, как было отмечено ранее для случая малых анизотропий.

Проведенный анализ спектров элементарных возбуждений и линий потери устойчивости фазовых состояний позволяет построить фазовую диаграмму исследуемой системы (рис. 2.4). На диаграмме сплошными линиями отмечены линии потери устойчивости ферромагнитного и квадрупольного фазовых состояний, полученных аналитически для предельных случаев соотношений между константами одноионных анизотропий. Пунктирные линии соответствуют также линиям потери устойчивости полученных фазовых состояний, построенных с помощью численных методов для произвольного соотношения констант одноионной анизотропии. Таким образом, становится очевидным, что линия устойчивости угловой ферромагнитной фазы лежит выше линии устойчивости квадрупольной фазы. Значит в области соотношений материальных параметров системы, находящейся между линиями устойчивости фазовых состояний реализуется промежуточной состояние с отличным от нуля как векторным, так и тензорным параметром порядка. Аналогично предыдущему разделу, такое состояние

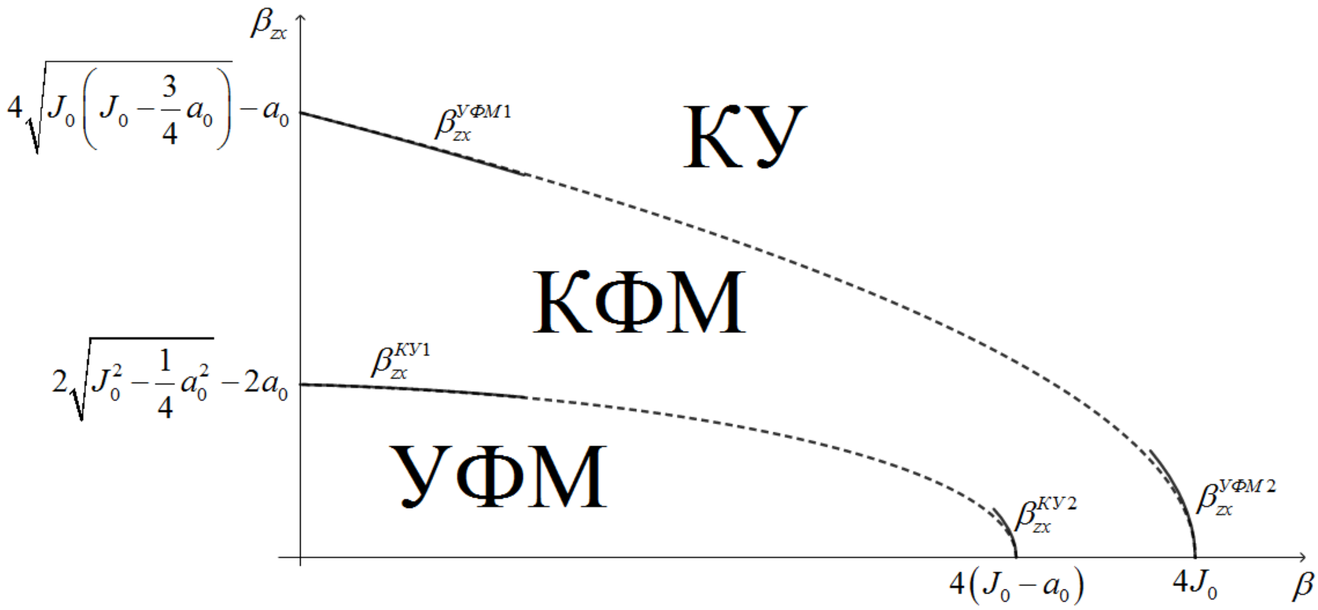

Рис. 2.4. Фазовая диаграмма жестко закрепленного ферромагнетика с конкурирующими анизотропиями

называется квудрупольно-ферромагнитным (КФМ). Следовательно, фазовый переход между УФМ и КУ фазами, проходит через КФМ состояние, что характерно для фазовых переходов первого рода. Более того, в отличие системы, рассмотренной в предыдущем разделе, влияние магнитоупругого взаимодействия привело к тому, что при равенстве нулю константы наклонной анизотропии β_{zx}, линии устойчивости фазовых состояний не совпадают. То есть учет взаимодействия магнитной и упругой подсистем приводит к снятию вырождения фазового перехода.

Также необходимо отметить тот факт, что влияние магнитоупругого взаимодействия в рассматриваемой системе сводится лишь к статическим перенормировкам спектров магнитоупругих волн и областей существования фазовых состояний, но не проявляется динамически. Так, например, отсутствует гибридизация упругих и магнитоупругих волн, и, как следствие, квазифононная ветвь возбуждения не размягчается в точке фазового перехода. Такое поведение обусловлено тем, что фазовый переход в исследуемой системе не является переориентационным [204]. Но при этом, изменение областей существования УФМ-фазы и квадрупольных фаз может быть достаточно существенным. Поскольку механизмом формирования одноионной анизотропии и магнитоупругого взаимодействия является спин-орбитальное взаимодействие, то в рассматриваемом нами случае больших значений наклонной и легкоплоскостной анизотропий, магнитоупругое взаимодействие может быть достаточно большим, как это наблюдается, например, в редкоземельных магнетиках [82].

Основные результаты второго раздела

1. При большом обменном взаимодействии (существенно превосходящем как наклонную, так и легкоплоскостную анизотропию) в системе реализуется ферромагнитное состояние. Вектор намагниченности ориентирован в плоскости ориентации наклонной анизотропии. Причем, равновесный угол ориентации вектора намагниченности определяется константами анизотропий и спонтанными деформациями. Поэтому данное состояние называется угловой ферромагнитной фазой (УФМ). Магнитоупругое взаимодействие в УФМ фазе проявляется только статически, то есть в окрестности линии потери устойчивости УФМ фазы не происходит динамического размягчения квазиакустической моды, но появляется аддитивная добавка в энергетической щели спектра квазимагнонов.
2. В случае больших анизотропий, превосходящих обменное взаимодействие, в системе реализуется состояние с тензорным параметром порядка и нулевым значением намагниченности на узле. Это состояние описывается соответствующими компонентами тензора квадрупольного момента, а геометрическим образом этой фазы в спиновом пространстве является одноосный эллипсоид, с главной осью, лежащей в плоскости ZOY. Это фазовое состояние называется квадрупольным (КУ). Спектры квазимагнонов существенно перенормируются статическими спонтанными деформациями, и линия

потери устойчивости квадрупольной фазы определяется из обращения в нуль щели в спектре низкочастотных квазимагнонов. Спектры же квазифононов остаются линейными по волновому вектору во всем интервале существования КУ-фазы, что связано с равенством нулю намагниченности.

3. Фазовый переход между угловой ферромагнитной фазой и квадрупольной фазой является фазовым переходом первого рода, проходящем через промежуточное состояние, описывающееся как векторным, так и тензорным параметром порядка. Более того, фазовый переход не является переориентационным. С последним утверждением и связано то, что в точке фазового перехода квазиакустические возбуждения не размягчаются, а мягкой модой становится низкочастотная квазимагнонная ветвь.

Раздел 3. Влияние механических граничных условий на свойства ультратонкой ферромагнитной пленки с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями

Как уже было упомянуто ранее, при рассмотрении магнитоупругого взаимодействия необходимо учитывать механические граничные условия. Однако наиболее интересным случаем учета механических граничных условий являются тонкие магнитные пленки [203].

При исследовании ультратонких магнитных пленок, наблюдается существенное изменение структуры спонтанных деформаций. Такое поведение связано с влиянием подложки на магнитную пленку, что может привести к наличию определенных механических граничных условий. Более того, тонкие магнитные пленки можно считать двумерными объектами, что также оказывает существенное влияние на упругие свойства рассматриваемой системы. Также, в результате такого приближения магнитодипольное и магнитупругое взаимодействия стабилизируют дальний порядок в системе [13, 79, 109].

Однако наиболее интересным проявлением магнитодипольного взаимодействия является возможность возникновения в пленке пространственно-неоднородного распределения намагниченности, т.е. к реализации в магнитоупорядоченной системе некоторого пространственно-неоднородного состояния с доменной структурой. Более того, влияние магнитодипольного взаимодействия может приводить к усилению легкоплоскостной анизотропии и, как результат, возникновению в тонких пленках таких структур как плоскопараллельные домены или других вихревых структур. Причем реализация подобных состояний возможна не только для ферромагнетиков, но и для антиферромагентиков.

В **первом подразделе** будет описана модель исследуемой системы, обусловлен выбор механических граничных условий и определена структура для спонтанных деформаций, решена одноузельная задача в общем случае.

Во **втором подразделе** мы рассмотрим влияние магнитодипольного взаимодействия на статические и динамические свойства системы, условия реализации и линии потери устойчивости фазовых состояний в случае малых значений одноионных анизотропий.

В **третьем подразделе** будет исследовано влияние магнитодипольного взаимодействия на статические и динамические свойства рассматриваемой системы, условия реализации и линии устойчивости фазовых состояний для случая больших значений одноионных анизотропий.

3.1. Модель жестко закрепленной ультратонкой ферромагнитной пленки с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями.

Как было упомянуто выше, наиболее интересным объектом является ультратонкая ферромагнитная пленка с толщиной в один атомный слой, в результате чего исследуемую модель можно считать двумерным объектом. Более того, спин магнитного иона считаем равным единице $S=1$, что приводит к возможности реализации в системе одноионной анизотропии, которая в исследуемой модели является комбинацией легкоплоскостной и наклонной анизотропий.

Жесткие механические граничные условия, накладываемые на систему, приводят к тому, что необходимо учитывать влияние магнитоупругого взаимодействия. Причем, аналогично второму разделу, выбор механических граничных условий осуществлялся так, чтобы влияние легкоплоскостной и наклонной анизотропий действующих в плоскостях XOY и ZOX соответственно было максимальным. Таким образом, образец жестко закреплен по плоскости ZOY. Согласно последнему обстоятельству, смещения магнитных ионов вдоль осей OZ и OY отсутствуют, т.е. $u_z = u_y = 0$. Также необходимо отметить, что поскольку мы рассматриваем двумерный объект, расположенный в плоскости XOY, толщиной которого можно пренебречь, еще одна компонента тензора спонтанных деформаций u_{zx} равна нулю.

С учетом всего вышесказанного можно представить гамильтониан системы в следующем виде:

$$\begin{gathered}\mathcal{H}=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{n,n'\\ i,j}}\left(J_{nn'}\delta^{ij}+V_{nn'}^{ij}\right)S_n^iS_{n'}^j+\beta\sum_n(S_n^z)^2-\beta_{zx}\sum_n\left(S_n^zS_n^x+S_n^xS_n^z\right)+\\ +\nu\sum_n\left\{u_{xx}\left(S_n^x\right)^2+u_{xy}\left(S_n^xS_n^y+S_n^yS_n^x\right)\right\}+\int d\vec{r}\left\{\frac{\lambda+\eta}{2}u_{xx}^2+\eta u_{xy}^2\right\}\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $J_{nn'}$ - обменный интеграл, учитывающий взаимодействие ближайших соседей, S_n^i - i-ая компонента спинового оператора в узле n, β - константа легкоплоскостной анизотропии с базисной плоскостью XOY, β_{zx} - константа наклонной анизотропии, действующей в плоскости XOZ, ν - константа магнитоупругой связи, u_{ij} - компоненты тензора упругих деформаций, λ и η - упругие модули, $V_{nn'}^{ij}$ - компоненты тензора магнитодипольного взаимодействия.

Для однослойной квадратной кристаллической решетки в координатном представлении компоненты тензора магнитодипольного взаимодействия имеют вид [109]:

$$V_{nn'}^{ij}=\left(g\mu_Б\right)^2\frac{3R_{nn'}^iR_{nn'}^j-\delta^{ij}R^2}{R_{nn'}^5}$$

а их фурье-образы можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}V_k^{xx}=\frac{A_0}{3}-\Omega_0k\cos^2\psi;\qquad V_k^{yy}=\frac{A_0}{3}-\Omega_0k\sin^2\psi;\\ V_k^{zz}=-\frac{2A_0}{3}-\Omega_0k;\qquad V_k^{xy}=V_k^{yx}=-\frac{\Omega_0k}{2}\sin2\psi;\\ V_k^{xz}=V_k^{zx}=V_k^{yz}=V_k^{zy}=0,\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $A_0=\frac{3}{2}\left(g\mu_Б\right)^2\sum_{R\neq0}R^{-3}$, $\Omega_0=\frac{2\pi\left(g\mu_Б\right)^2}{a^2}$, a^2 - «объем» элементарной ячейки, g - гиромагнитное отношение, $\mu_Б$ - магнетон Бора, ψ - угол ориентации волнового вектора $\vec{k}$ в базисной плоскости XOY относительно оси OX.

Дальнейшее исследование свойств системы будет проводиться в области низких температур, много меньших температуры Кюри ($T \ll T_C$).

Аналогично предыдущим разделам, конкуренция одноионных анизотропий приведет к тому, что магнитный момент иона находится в плоскости ZOX и составляет некоторый угол θ с осью OZ (рис. 3.1). Однако влияние магнитоупругого и магнитодипольного взаимодействия также внесут свой вклад в равновесное значение угла θ. Для упрощения дальнейших вычислений, перейдем в новую систему координат, связанную с магнитным моментом. Такой переход описывается следующим унитарным преобразованием $U(\theta)=\prod_n \exp\left[i\theta S_n^y\right]$. Тогда, выделяя среднее поле в гамильтониане (3.1) в новой системе координат, получим одноузельный гамильтониан:

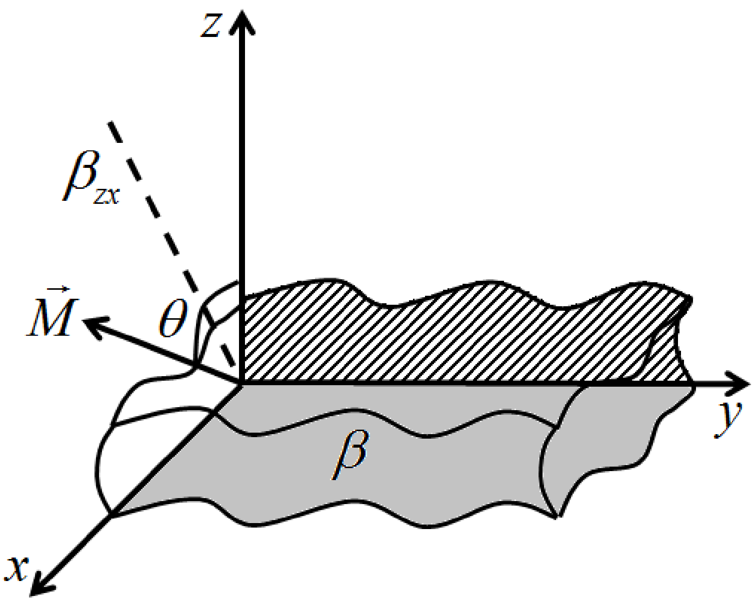

Рис. 3.1. Геометрия исследуемой модели

$$\mathcal{H}_0(\theta) = -\bar{H}_z \sum_n S_n^z - \bar{H}_x \sum_n S_n^x + B_2^0(\theta) \sum_n \left(S_n^z\right)^2 + B_2^2(\theta) \sum_n O_{2n}^2 + \\ + B_2^{xz}(\theta) \sum_n O_{2n}^{xz} + B_2^{xy}(\theta) \sum_n O_{2n}^{xy} + B_2^{yz}(\theta) \sum_n O_{2n}^{yz} + 2B_2^2(\theta). \tag{3.3}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&B_2^0(\theta) = \frac{1}{8}\left\{(\beta + 2\nu u_{xx}) + 3(\beta - 2\nu u_{xx})\cos 2\theta - 6\beta_{xz}\sin 2\theta\right\};\\
&B_2^2(\theta) = \frac{1}{8}\left\{(\beta + 2\nu u_{xx}) - (\beta - 2\nu u_{xx})\cos 2\theta + 2\beta_{xz}\sin 2\theta\right\};\\
&B_2^{xz}(\theta) = -\frac{1}{4}\left\{(\beta - 2\nu u_{xx})\sin 2\theta + 2\beta_{xz}\cos 2\theta\right\};\\
&B_2^{xy}(\theta) = \nu u_{xy}\cos\theta; \quad B_2^{yz}(\theta) = \nu u_{xy}\sin\theta;\\
&\bar{H}_z = \left(J_0 + V_0^{zz}\cos^2\theta + V_0^{xx}\sin^2\theta\right)\left\langle S^z\right\rangle;\\
&\bar{H}_x = \frac{V_0^{xx} - V_0^{zz}}{2}\left\langle S^z\right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Для решения одноузельной задачи с гамильтонианом (3.3) построим операторы Хаббарда, аналогично случаю рассмотренному в первом и втором разделах. Тогда в терминах операторов Хаббарда, одноузельный гамильтониан (3.3) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0(\theta) = &\left\{-\bar{H}_z + B_2^0(\theta) + 2B_2^2(\theta)\right\} X^{11} + 2B_2^0(\theta) X^{00} + \\
&+\left\{\bar{H}_z + B_2^0(\theta) + 2B_2^2(\theta)\right\} X^{-1-1} + \left\{B_2^2(\theta) - iB_2^{xy}(\theta)\right\} X^{1-1} + \\
&+\left\{B_2^2(\theta) + iB_2^{xy}(\theta)\right\} X^{-11} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{B_2^{zx}(\theta) - \bar{H}_x - iB_2^{yz}(\theta)\right\} X^{10} + \\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{B_2^{zx}(\theta) - \bar{H}_x + iB_2^{yz}(\theta)\right\} X^{01} + \\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-B_2^{zx}(\theta) - \bar{H}_x + iB_2^{yz}(\theta)\right\} X^{0-1} + \\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-B_2^{xz}(\theta) - \bar{H}_x - iB_2^{yz}(\theta)\right\} X^{-10}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Для определения спектра энергии и волновых функций магнитного иона, приведем гамильтониан (3.5) к диагональному виду используя метод диагонализации многоуровневых гамильтонианов унитарными преобразованиями группы *U(N)*, который уже был описан ранее в предыдущих разделах.

В рассматриваемой модели, в силу симметрийных свойств гамильтониана, для его к диагональному виду достаточно двух унитарных преобразований $U_{1-1}\left(A\right)$ и $U_{10}\left(\Delta\right)$, параметры которых определяются из равенства нулю недиагональных амплитуд гамильтониана (3.5) и имеют вид:

$$\begin{gathered}
\operatorname{tg} 2|A| = -\frac{\sqrt{\left[B_2^2(\theta)\right]^2 + \left[B_2^{xy}(\theta)\right]^2}}{\bar{H}_z}; \quad \arg A = -\operatorname{arctg}\frac{B_2^{xy}(\theta)}{B_2^2(\theta)}; \\
\operatorname{tg} 2|\Delta| = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}\left[\chi - B_2^0(\theta)\right]} \times \left\{\left[\bar{H}_x^2 + \left(B_2^{zy}(\theta)\right)^2\right]\left[\chi + B_2^2(\theta)\right] + \right. \\
\left. + \left(B_2^{zx}(\theta)\right)^2\left[\chi - B_2^2(\theta)\right] - 2B_2^{zx}(\theta)\left[\bar{H}_z\bar{H}_x + B_2^{xy}(\theta)B_2^{zy}(\theta)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}; \\
\arg\Delta = -\operatorname{arctg}\frac{\left[\chi + \bar{H}_z\right]B_2^{zy}(\theta) - \left[B_2^{zx}(\theta) + \bar{H}_x\right]B_2^{xy}(\theta) + B_2^{zy}(\theta)B_2^2(\theta)}{\left[\chi + \bar{H}_z\right]\left[B_2^{zx}(\theta) - \bar{H}_x\right] - \left[B_2^{zx}(\theta) + \bar{H}_x\right]B_2^2(\theta) - B_2^{zy}(\theta)B_2^{xy}(\theta)}.
\end{gathered} \tag{3.6}$$

где $\chi = \sqrt{\bar{H}^2 + \left[B_2^2(\theta)\right]^2 + \left[B_2^{xy}(\theta)\right]^2}$.

С учетом выражения (3.6) диагональные слагаемые одноузельного гамильтониана в представлении операторов Хаббарда (3.5), которые имеют смысл уровней энергии магнитного иона, равны:

$$\begin{gathered}
E_{1,0} = \frac{B_2^0(\theta) - \chi}{2} + 2B_2^2(\theta) \pm \frac{1}{2}\left\{\left(B_2^0(\theta) - \chi\right)^2 - \right. \\
-\frac{4}{\chi}B_2^{zx}(\theta)\left[\bar{H}_z\bar{H}_x + B_2^{zy}(\theta)B_2^{xy}(\theta)\right] + \\
\left. + \frac{2}{\chi}\left\{\left[\bar{H}_x^2 + \left(B_2^{zy}(\theta)\right)^2\right]\left[\chi + B_2^2(\theta)\right] + \left(B_2^{zx}(\theta)\right)^2\left[\chi - B_2^2(\theta)\right]\right\}\right\}^{\frac{1}{2}}; \\
E_{-1} = B_2^0(\theta) + \chi + 2B_2^2(\theta).
\end{gathered} \tag{3.7}$$

а собственные функции одноузельного гамильтониана приобретают вид:

$$\begin{aligned}
&\left|\psi(1)\right\rangle = \cos|A|\left|1\right\rangle + \sin|A|\left|-1\right\rangle; \\
&\left|\psi(0)\right\rangle = -\sin|A|\sin|\Delta|\left|1\right\rangle + \cos|\Delta|\left|0\right\rangle + \cos|A|\sin|\Delta|\left|-1\right\rangle; \\
&\left|\psi(-1)\right\rangle = -\sin|A|\cos|\Delta|\left|1\right\rangle + \sin|\Delta|\left|0\right\rangle + \cos|A|\cos|\Delta|\left|-1\right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Из (3.7) очевидно, что при любом соотношении материальных параметров исследуемой системы, уровень энергии E_1 остается минимальным, то есть соответствует энергии основного состояния магнитного иона, и, следовательно, функция $\left|\psi(1)\right\rangle$ определяет основное состояние. Поскольку дальнейшие вычисления в общем виде при произвольных соотношениях материальных параметров достаточно громоздки, будем рассматривать систему для конкретных частных случаев.

3.2. Фазовые состояния и динамические особенности жестко закрепленной слабоанизотропной ультратонкой ферромагнитной пленки с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной анизотропиями

Предположим, что между материальными параметрами системы имеет место соотношение: $J_0 > \beta, \beta_{zx} > \nu, A_0, \Omega_0$. При этом, предполагаем, что соотношение между константами легкоплоскостной и наклонной анизотропиями может быть произвольным. Тогда одноузельный гамильтониан (3.3) диагонализуется двумя унитарными преобразованиями, связывающими состояния $M=1$ и $M=-1$, а также состояния $M=1$ и $M=0$. Параметры указанных унитарных преобразований в общем виде определяются формулой (3.6), а энергетические уровни и волновые функции магнитного иона – формулами (3.7) и (3.8), соответственно. При этом энергетический уровень E_1 определяет плотность свободной энергии системы:

$$F = F_{упр} - T\ln\left\{e^{-\frac{E_1}{T}} + e^{-\frac{E_0}{T}} + e^{-\frac{E_{-1}}{T}}\right\} \approx F_{упр} - E_1 \tag{3.9}$$

где $F_{упр}$ - плотность упругой энергии. Тогда, равновесные значения некоторых параметров исследуемой системы, довольно легко получить из условия минимума плотности свободной энергии. Так, получим равновесный угол θ_0 ориентации магнитного момента

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = -\frac{2\beta_{zx}}{\beta - 2\nu u_{xx} + 2A_0} \tag{3.10}$$

и спонтанные деформации

$$u_{xx}^{(0)} = -\frac{\nu}{4(\eta+\lambda)}\left(3 + \frac{\beta}{\sqrt{4\beta_{zx}^2 + \beta^2}}\right); \quad u_{xy}^{(0)} = 0. \tag{3.11}$$

Таким образом из (3.10) видно, что учет магнитодипольного взаимодействия приводит к усилению легкоплоскостной анизотропии, но при этом неоказывает никакого влияния на спонтанные деформации системы. Более того, с учетом соотношений (3.10) и (3.11) обращаются в нуль эффективные анизотропии $B_2^{xy}(\theta_0) = B_2^{yz}(\theta_0) = B_2^{zx}(\theta_0) = 0$, а отличными от нуля остаются лишь $B_2^0(\theta_0)$ и $B_2^2(\theta_0)$. Таким образом, поведение рассматриваемой системы с легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями и магнитодипольным взаимодействием, можно привести к поведению двухосного магнетика с константами анизотропий $B_2^0(\theta_0)$ и $B_2^2(\theta_0)$.

Исходя из указанных выше соотношений, параметры унитарных преобразований (3.6) существенно упрощаются:

$$\begin{gathered}
\operatorname{tg} 2|A| = -\frac{B_2^2(\theta_0)}{\bar{H}_z}; \quad \arg A = 0; \\
\operatorname{tg} 2|\Delta| = -\sqrt{\frac{2\left[\chi + B_2^2(\theta)\right]}{\chi}}\frac{\bar{H}_x}{\left[\chi - B_2^0(\theta)\right]}; \\
\arg \Delta = 0;
\end{gathered} \tag{3.12}$$

однако оба параметра унитарных преобразований отличны от нуля. В силу того, что $J_0 \ll A_0$, параметр унитарного преобразования можно считать малым, следовательно $\cos|\Delta|\approx 1,\quad \sin|\Delta|\approx 0$. Тогда уровни энергии (3.17) и волновые функции (3.8) примут более простой вид:

$$E_{1,0}=\frac{B_2^0(\theta)-\chi}{2}\pm\frac{1}{2}\left\{\left(B_2^0(\theta)-\chi\right)^2+2\bar{H}_x^2\frac{\chi+B_2^2(\theta)}{\chi}\right\}^{\frac{1}{2}}+2B_2^2(\theta);$$
$$E_{-1}=B_2^0(\theta)+\chi+2B_2^2(\theta). \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}&|\psi(1)\rangle=\cos|A||1\rangle+\sin|A||-1\rangle;\\&|\psi(0)\rangle=|0\rangle;\\&|\psi(-1)\rangle=-\sin|A||1\rangle+\cos|A||-1\rangle.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Тогда, построенные на базисе собственных функций (3.14) операторы Хаббарда связаны со спиновыми операторами следующим образом:

$$\begin{aligned}&S^z=\cos 2|A|\left(X^{11}-X^{-1-1}\right)-\sin 2|A|\left(X^{1-1}+X^{-11}\right);\\&S^+=\sqrt{2}\cos|A|\left(X^{10}-X^{0-1}\right)+\sqrt{2}\sin|A|\left(X^{01}+X^{-10}\right);\\&S^-=\left(S^+\right)^+.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Так как E_1 является низшим энергетическим уровнем, то, как вытекает из (3.15), среднее значение намагниченности (на один узел) $\langle S^z\rangle=\cos 2A\approx 1$, в рассматриваемом диапазоне соотношений материальных констант. То есть, система описывается векторным параметром порядка, а значит, реализуется ферромагнитное упорядочение. Поскольку вектор намагниченности лежит под углом (3.10), то такое состояние – угловая ферромагнитная фаза (УФМ).

В дальнейшем, нашей задачей будет исследование динамических свойств системы и определение области устойчивости полученного фазового состояния, что подразумевает под собой определение спектров элементарных возбуждений. Аналогично предыдущим разделам построим полный гамильтониан в виде $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_{\text{int}}+\mathcal{H}_{tr}$. Одноузельный гамильтониан $\mathcal{H}_0$ является диагональным в терминах операторов Хаббарда, гамильтониан трансформации $\mathcal{H}_{tr}$ имеет стандартный вид:

$$\mathcal{H}_{tr} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{i,j,\mathrm{q},\\ \varphi,\mathrm{n}}} \left(b_{q,\varphi} + b^{+}_{-q,\varphi}\right) T_n^{ij}\left(q,\varphi\right) X_n^{ij}. \qquad (3.16)$$

Где $e^i_\varphi\left(q\right)$ – проекция единичного вектора поляризации на ось i; q_i – проекция квазиимпульса на ось i; N – число узлов в кристалле; m – масса атома; $\omega_\varphi\left(q\right) = c_\varphi q$ – закон дисперсии невзаимодействующих фононов; c_φ – скорость φ-поляризованного фонона; $b^{+}_{-q,\varphi}$ и $b_{q,\varphi}$ – операторы рождения и уничтожения фононов; $T_n\left(q,\varphi\right)$ – амплитуды трансформаций.

$$\begin{gathered}
T_n^{11}(q,\varphi) = T_n^{-1-1}(q,\varphi) = \frac{i\nu}{4} T_n^0(q,\varphi)\Big\{3\left(e^x_{\varphi q}q_x + 2e^y_{\varphi q}q_y + e^z_{\varphi q}q_z\right) - \\
-\left(e^x_{\varphi q}q_x - e^z_{\varphi q}q_z\right)\cos 2\theta + \left(e^x_{\varphi q}q_z + e^z_{\varphi q}q_x\right)\sin 2\theta\Big\}; \\
T_n^{00}(q,\varphi) = \frac{i\nu}{2} T_n^0(q,\varphi)\Big\{e^x_{\varphi q}q_x + 2e^y_{\varphi q}q_y + e^z_{\varphi q}q_z - \\
-\left(e^x_{\varphi q}q_x - e^z_{\varphi q}q_z\right)\cos 2\theta - \left(e^x_{\varphi q}q_z + e^z_{\varphi q}q_x\right)\sin 2\theta\Big\}; \\
T_n^{10}(q,\varphi) = \frac{i\nu}{2\sqrt{2}} T_n^0(q,\varphi)\Big\{\left(e^x_{\varphi q}q_x - e^z_{\varphi q}q_z\right)\sin 2\theta + \\
+\left(e^x_{\varphi q}q_z + e^z_{\varphi q}q_x\right)\cos 2\theta - i\Big[\left(e^x_{\varphi q}q_y + e^y_{\varphi q}q_x\right)\sin\theta + \\
+\left(e^z_{\varphi q}q_y + e^y_{\varphi q}q_z\right)\cos\theta\Big]\Big\}; \quad T_n^{01}(q,\varphi) = -\left[T_n^{10}(q,\varphi)\right]^*; \\
T_n^{0-1}(q,\varphi) = -T_n^{10}(q,\varphi); \quad T_n^{-10}(q,\varphi) = -\left[T_n^{0-1}(q,\varphi)\right]^*; \\
T_n^{1-1}(q,\varphi) = \frac{i\nu}{4} T_n^0(q,\varphi)\Big\{e^x_{\varphi q}q_x - 2e^y_{\varphi q}q_y + e^z_{\varphi q}q_z + \\
+\left(e^x_{\varphi q}q_x - e^z_{\varphi q}q_z\right)\cos 2\theta - \left(e^x_{\varphi q}q_z + e^z_{\varphi q}q_x\right)\sin 2\theta - \\
-2i\Big[\left(e^x_{\varphi q}q_y + e^y_{\varphi q}q_x\right)\cos\theta - \left(e^y_{\varphi q}q_z + e^z_{\varphi q}q_y\right)\sin\theta\Big]\Big\}; \qquad (3.17) \\
T_n^{-11}(q,\varphi) = -\left[T_n^{1-1}(q,\varphi)\right]^*, \quad T_n^0(q,\varphi) = \frac{e^{i\mathbf{qn}}}{\sqrt{2m\omega_\varphi(q)}}.
\end{gathered}$$

Гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}_{\text{int}}$ в терминах операторов Хаббарда можно переписать в виде:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{n,n' \\ \alpha,\alpha'}} \left\{ \vec{c}(\alpha), \widehat{A}_{nn'} \vec{c}(\alpha') \right\} X_n^{\alpha} X_n^{\alpha'}, \tag{3.18}$$

В (3.18) компоненты вектора $\vec{c}(\alpha)$ определяются из связи спиновых операторов с операторами Хаббарда (3.15), а матрица $\widehat{A}_{nn'}$ содержит компоненты:

$$\begin{aligned}
&A_{nn'}^{11} = J_{nn'} + V_{nn'}^{xx} \sin^2\theta + V_{nn'}^{zz} \cos^2\theta; \\
&A_{nn'}^{12} = A_{nn'}^{21} = \frac{1}{4}\Big(\big[V_{nn'}^{xx} - V_{nn'}^{zz} \big] \sin 2\theta - 2iV_{nn'}^{xy} \sin\theta \Big); \\
&A_{nn'}^{13} = A_{nn'}^{31} = \frac{1}{4}\Big(\big[V_{nn'}^{xx} - V_{nn'}^{zz} \big] \sin 2\theta + 2iV_{nn'}^{xy} \sin\theta \Big); \\
&A_{nn'}^{22} = \left(A_{nn'}^{33} \right)^* = \frac{1}{4}\Big(V_{nn'}^{xx} \cos^2\theta - V_{nn'}^{yy} + V_{nn'}^{zz} \sin^2\theta - 2iV_{nn'}^{xy} \cos\theta \Big); \\
&A_{nn'}^{23} = A_{nn'}^{32} = \frac{1}{4}\Big(2J_{nn'} + V_{nn'}^{xx} \cos^2\theta + V_{nn'}^{yy} + V_{nn'}^{zz} \sin^2\theta \Big);
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Для определения спектров связанных магнитоупругих волн, построим функцию Грина, как было подробно описано в первом разделе. Тогда, решение дисперсионного уравнения, возникающее при определении полюсов функции Грина, позволяет определить спектры элементарных возбуждений в рассматриваемой нами УФМ фазе при $J_0 > \beta_{zx}, \beta > \nu, A_0, \Omega_0$. Так, спектр квазимагнонов будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^2(k) = &\Big(E_{10} + 2\big[A_k^{32} + \operatorname{Re} A_k^{22} \big] \times \big[1 + \sin 2|A| \big] \Big) \times \\
\times &\Big(E_{10} + 2\big[A_k^{32} - \operatorname{Re} A_k^{22} \big] \times \big[1 - \sin 2|A| \big] \Big) + \left(\operatorname{Im} A_k^{22} \right)^2;
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\varepsilon_2^2(k) = E_{1-1}\Big(E_{1-1} + 2A_k^{11} \sin^2|A| \Big); \tag{3.21}$$

Где $E_{ij} = E_i - E_j$, а A_k^{ij} – фурье-образ компонент матрицы $\widehat{A}_{nn'}$. Общий анализ выражений (3.20) и (3.21) позволяет сделать заключение, что ветвь $\varepsilon_1(k)$

соответствует низкочастотной квазимагнонной ветви, а ветвь $\varepsilon_2\left(k\right)$ – высокочастотной. Таким образом, дальнейшие исследования будут связаны с наиболее интересной для нас низкочастотной ветвью спектра.

В рассматриваемой УФМ фазе, спектр квазимагнонов в длинноволновом пределе имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\varepsilon_1^2\left(k\right)=\left\{2\chi-B_2^0\left(\theta_0\right)+B_2^2\left(\theta_0\right)+\frac{A_0}{2}\left(1+\cos 2\theta_0\right)\left(1+\frac{B_2^2\left(\theta_0\right)}{\chi}\right)+\right.\\ \left.+\left(\frac{J_0}{2}k^2+\Omega_0 k\sin^2\psi\right)\times\left(1+\frac{B_2^2\left(\theta_0\right)}{\chi}\right)\right\}\times\left\{2\chi-B_2^0\left(\theta_0\right)-B_2^2\left(\theta_0\right)+\right.\\ \left.+\frac{1}{2}\left(J_0k^2-\Omega_0 k\left[1+\cos^2\psi-\sin^2\psi\cos 2\theta_0\right]\right)\left(1-\frac{B_2^2\left(\theta_0\right)}{\chi}\right)\right\};\end{gathered} \tag{3.22}$$

Что касается квазиакустических возбуждений, спектры квазимагнонов в угловой ферромагнитной фазе в общем виде определяются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\omega_1^2\left(k\right)=\omega_t^2\left(k\right)\left\{1+\frac{a_0\sin^2 2\theta}{2E_{1-1}}+\frac{a_0\cos^2 2\theta}{E_{10}+2\left[A_k^{32}+\operatorname{Re}A_k^{22}\right]\times\left[1+\sin 2\left|A\right|\right]}\right\};\\ \omega_2^2\left(k\right)=\omega_l^2\left(k\right)\left\{1+\frac{a_0\left[1+\cos 2\theta\right]^2}{2E_{1-1}}+\frac{a_0\sin^2 2\theta}{E_{10}+2\left[A_k^{32}+\operatorname{Re}A_k^{22}\right]\times\left[1+\sin 2\left|A\right|\right]}\right\};\\ \omega_3^2\left(k\right)=\omega_\tau^2\left(k\right)\left\{1+\frac{a_0\left[1+\cos 2\theta\right]}{2E_{1-1}}+\frac{a_0\left(1-\cos 2\theta\right)}{2E_{10}+4\left[A_k^{32}+\operatorname{Re}A_k^{22}\right]\times\left[1+\sin 2\left|A\right|\right]}\right\}.\end{gathered} \tag{3.23}$$

где $a_0=\dfrac{\nu^2}{2\eta}$ – параметр магнитоупругой связи.

Анализ квазифононных спектров (3.23) показывает, что в рассматриваемом ферромагнитном состоянии, когда параметр константы одноионной аниотропии существенно превосходят параметр магнитоупругой связи ($a_0 \ll \beta,\beta_{zx}$), не происходит активного взаимодействия квазиакустических ветвей возбуждения с магнитной подсистемой. Таким образом, влияние магнитупругого и магнитодипольного взаимодействий сводится лишь перенормировке скорости звука, а законы дисперсии квазифононов остаются линейными по волновому вектору. Поскольку в рассматриваемой системе не происходит гибридизации возбуждений, то фазовый переход будет протекать по квазимагнонной ветви возбуждения (3.22). Однако из (3.22) легко видеть, что учет влияния магнитодипольного взаимодействия приводит не только к статической перенормировке спектров, но и к возникновению линейного по волновому вектору слагаемого. Причем это слагаемое имеет отличный знак от стандартного слагаемого пропорционального k^2. Последний факт означает, что спектр становится неустойчивым не при $k=0$, а при некотором критическом значении $k=k^*$, где:

$$k^* = \frac{\Omega_0}{2J_0}\left(1+\cos^2\psi - \sin^2\psi\cos 2\theta_0\right) \tag{3.24}$$

В результате такого поведения спектра квазимагнонов, одному значению энергии возбуждения может соответствовать два различных значения волнового вектора, что свидетельствует о том, что в системе реализуется пространственно неоднородное (доменное) состояние [5, 6]. Причем, выражение (3.24) показывает, что переход в пространственно неоднородное состояние возможен при любой ориентации волнового вектора в базисной плоскости. Период неоднородности, определяемый соотношением

$$\frac{1}{k^*} = \frac{2J_0}{\Omega_0\left(1+\cos^2\psi - \sin^2\psi\cos 2\theta_0\right)}, \tag{3.25}$$

будет существенно зависеть как от направления волнового вектора, так и от равновесного угла θ_0 ориентации магнитного момента в узле (3.10), определяемого соотношением между материальными параметрами (рис. 3.2):

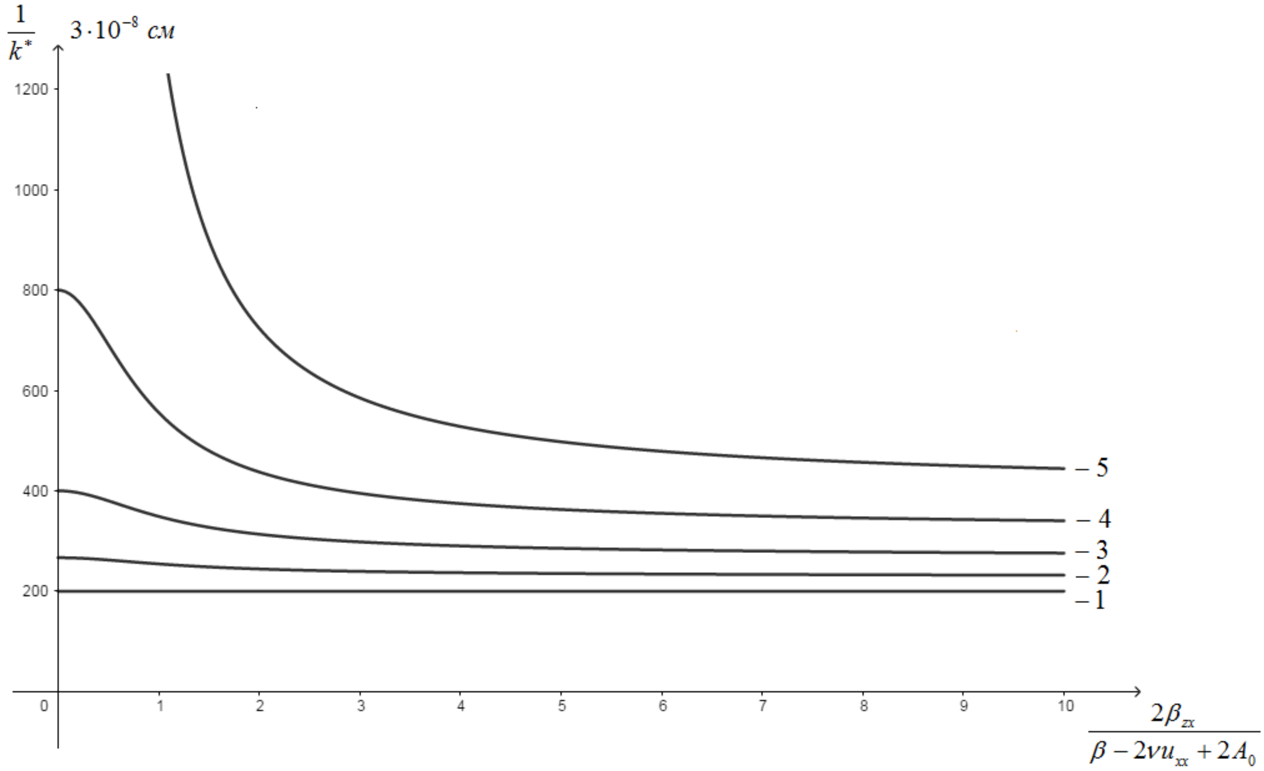

Рис. 3.2 Зависимость периода неоднородности от материальных параметров системы, при различной ориентации волнового вектора в базисной плоскости. График 1 соответствует значению $\psi = 0$, график 2 - $\psi = \frac{\pi}{6}$, график 3 - $\psi = \frac{\pi}{4}$, график 4 - $\psi = \frac{\pi}{3}$, график 5 - $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Как видно из рис. 3.2, при ориентации волнового вектора параллельно оси OX, будет наблюдаться наименьшее значение периода неоднородности, одинакового для любых соотношений между константами легкоплоскостной и наклонной анизотропий. При отклонении волнового вектора от оси OX, период неоднородности увеличивается, и в случае β □ β_{zx} это изменение становится существенней. В случае, когда волновой вектор направлен вдоль оси OY, период неоднородности достигает своего максимального значения, а при стремлении константы наклонной анизотропии к нулю, пространственно система становится монодоменной.

Более того, линия устойчивости УФМ фазы также существенно зависит от угла ориентации волнового вектора. Дальнейшее рассмотрение будет проводиться в двух предельных случаях: $\beta \gg \beta_{zx}$ и $\beta_{zx} \gg \beta$, позволяющих также определить в явном виде перенормированные спектры квазифононов.

Для случая $\beta_{zx} \gg \beta$, спектры квазифононов перенормируются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\omega_1^2(k) = \omega_t^2(k)\left(1 - \frac{a_0}{4J_0}\right);\\
&\omega_2^2(k) = \omega_l^2(k)\left(1 - \frac{a_0}{4J_0} + \frac{a_0}{8J_0 - \beta - 2A_0}\right);\\
&\omega_3^2(k) = \omega_\tau^2(k)\left(1 - \frac{a_0}{4J_0} + \frac{a_0}{8J_0 - \beta - 2A_0}\right).
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Что касается квазимагнонного спектра, то, определяющая фазовый переход, дисперсионная ветвь имеет следующий вид в рассматриваемом случае:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1^2(k) = &\left\{2J_0 - \frac{A_0}{3} - \frac{\beta - 3a_0}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{4\beta_{zx}^2 + \left(\beta + 3a_0 + 2A_0\right)^2} + \right.\\
&+\frac{1}{2}\left(J_0 - \frac{A_0}{6} - \frac{\beta - 3a_0}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{4\beta_{zx}^2 + \left(\beta + 3a_0 + 2A_0\right)^2}\right)\times\\
&\left.\times\left(k^2 - \frac{\Omega_0}{J_0}k\left[1 + \cos^2\psi\right]\right)\right\}\left\{2J_0 + \frac{A_0}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{4\beta_{zx}^2 + \left(\beta + 3a_0 + 2A_0\right)^2} + \right.\\
&+\frac{1}{2}\left(J_0 - \frac{A_0}{6} + \frac{\beta - 3a_0}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{4\beta_{zx}^2 + \left(\beta + 3a_0 + 2A_0\right)^2}\right)\times\\
&\left.\times\left(k^2 + 2\frac{\Omega_0}{J_0}k\sin^2\psi\right)\right\};
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

а линия потери устойчивости УФМ фазы определяется соотношением:

$$\beta_{zx}^{УФМ1} = 4\left\{\left(J_0 - \frac{A_0}{6} - \frac{\beta - 3a_0}{8}\right)^2\left(1 - \frac{\Omega_0^2\left(1+\cos^2\psi\right)^2}{4J_0^2}\right) - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{\beta + 3a_0}{8} + \frac{A_0}{4}\right)^2\right\} \tag{3.28}$$

В противоположном случае, когда β □ β_{zx}, перенормировка скорости звука для спектров квазиакустических возбуждений имеет вид:

$$\begin{aligned} \omega_1^2(k) &= \omega_t^2(k)\left(1 - \frac{a_0}{2J_0}\right); \\ \omega_2^2(k) &= \omega_l^2(k); \\ \omega_3^2(k) &= \omega_\tau^2(k)\left(1 + \frac{a_0}{J_0}\right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Для дисперсионной ветви спектра квазимагнонов в данном приближении перенормировки за счет влияние магнитодипольного и магнитупругого взаимодействия становятся более существенными:

$$\varepsilon_1^2(k) = \left\{2J_0 - \frac{16A_0}{3} - \frac{\beta - 4a_0}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{4\beta_{zx}^2 + \left(\beta + 4a_0 + 2A_0\right)^2} + \right.$$
$$+\frac{1}{2}\left(J_0 - \frac{2A_0}{3} - \frac{\beta - 4a_0}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{4\beta_{zx}^2 + \left(\beta + 4a_0 + 2A_0\right)^2}\right)\times$$
$$\left.\times\left(k^2 - \frac{\Omega_0}{J_0}k\left[1+\cos 2\psi\right]\right)\right\}\times\left\{2J_0 - \frac{25A_0}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{4\beta_{zx}^2 + \left(\beta + 4a_0 + 2A_0\right)^2} + \right. \tag{3.30}$$
$$+\frac{1}{2}\left(J_0 - \frac{2A_0}{3} + \frac{\beta - 4a_0}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{4\beta_{zx}^2 + \left(\beta + 4a_0 + 2A_0\right)^2}\right)\times$$
$$\left.\times\left(k^2 + 2\frac{\Omega_0}{J_0}k\sin^2\psi\right)\right\};$$

Данный факт легко объяснить тем, что в исследуемой модели ультратонкой пленки с механическими граничными условиями наибольшее действие магнитоупругого и магнитодипольного взаимодействий проявляется в базисной плоскости. Следовательно, большая легкоплоскостная анизотропия усиливает их влияние.

Тогда, с учетом выражения (3.28), из равенства нулю энергетической щели спектра определим линию устойчивости УФМ фазы в данном случае:

$$\beta_{zx}^{УФМ\,2}=4\left\{\left(J_0-\frac{14A_0}{3}-\frac{\beta-4a_0}{8}\right)^2\left(1-\frac{\Omega_0^2\left(1+\cos 2\psi\right)^2}{4J_0^2}\right)-\left(\frac{\beta+4a_0}{8}+\frac{A_0}{4}\right)^2\right\} \tag{3.31}$$

Для произвольного соотношения констант одноионной анизотропии было получено численное решения для линии потери устойчивости ферромагнитного состояния, которое в дальнейшем будет построено на фазовой диаграмме исследуемой модели.

3.3. Фазовые состояния и динамические особенности жестко закрепленной сильноанизотропной ультратонкой ферромагнитной пленки с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной анизотропиями

Теперь рассмотрим случай, когда в системе реализуется следующее соотношение между материальными параметрами: $\beta, \beta_{zx} \gg J_0 \gg \nu, A_0, \Omega_0$, то есть энергия одноионной анизотропии существенно превосходит энергию обменного взаимодействия. При этом заранее не устанавливаем соотношение между константами легкоплоскостной и наклонной анизотропий, считая его произвольным. В данном случае, аналогично случаю, рассмотренному в предыдущем подразделе, одноузельный гамильтониан (3.3) диагонализуется двумя унитарными преобразованиями, параметры которых в общем виде определяются формулами (3.6). Тогда уровни энергии магнитного иона и его волновые функции соответствуют выражениям (3.7) и (3.8). Плотность свободной энергии также определяется выражением (3.9). Таким образом, можно получить равновесное значение угла ориентации магнитного момента и компоненты тензора спонтанных деформаций из условия минимума плотности свободной энергии. В рассматриваемом случае сильноанизотропного магнетика вышеуказанные величины будут определяться соотношениями:

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = -\frac{2\beta_{zx}}{\beta - 2\nu u_{xx}} \tag{3.32}$$

$$u_{xx}^{(0)} = -\frac{\nu}{2(\eta+\lambda)}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{4\beta_{zx}^2 + \beta^2}}\right); \quad u_{xy}^{(0)} = 0. \tag{3.33}$$

Из (3.32) следует, что в исследуемом случае магнитодипольное взаимодействие, в отличие от случая слабоанизотропного магнетика, не влияет на легкоплоскостную анизотропию, что объясняется равенством нулю среднего значения намагниченности на узле (будет показано ниже).

Далее получим, что с учетом соотношений (3.32) и (3.33) выражения $B_2^{xy}(\theta_0)$, $B_2^{yz}(\theta_0)$ и $B_2^{zx}(\theta_0)$ обращаются в нуль. То есть, поведение исследуемой системы в случае больших анизотропий также сводится к поведению двухосного магнетика с отличными от нуля константами анизотропии $B_2^0(\theta_0)$ и $B_2^2(\theta_0)$. Таким образом, как и в предыдущих разделах, поведение исследуемой системы с легкоплоскостной и наклонной анизотропиям и магнитодипольным взаимодействием, можно привести к поведению двухосного магнетика с константами анизотропий $B_2^0(\theta_0)$ и $B_2^2(\theta_0)$.

Вследствие вышесказанного, а также с учетом приближения $J_0 \ll A_0$, получим, что параметры унитарных преобразований (3.6) существенно упрощаются и можно считать, что:

$$\begin{gathered}\operatorname{tg} 2|A| = -\frac{B_2^2(\theta_0)}{\bar{H}_z}; \quad \arg A = 0; \\ \operatorname{tg} 2|\Delta| \approx 0; \quad \arg \Delta = 0.\end{gathered} \tag{3.34}$$

В результате, уровни энергии и волновые функции магнитного иона описываются выражениями (3.13) и (3.14) соответственно. Следовательно, связь спиновых операторов с операторами Хаббарда, построенными на базисе волновых функций иона, имеет вид (3.15).

Из (3.15) с учетом значений параметров унитарных преобразований (3.34) следует, что в рассматриваемом соотношении между материальными параметрами системы среднее значение намагниченности на узле становится равным нулю ($\left\langle S^z \right\rangle = \cos 2|A| = 0$). То есть в исследуемом случае магнитного диэлектрика с энергией одноионной анизотропии существенно превышающую энергию обменного, магнитодипольного и магнитоупругого взаимодействий, реализуется фазовое состояние с нулевой намагниченностью. Однако отличны от нуля компоненты тензора квадрупольных моментов: $q_2^0 = \left\langle O_2^0 \right\rangle = 1;\ q_2^2 = \left\langle O_2^2 \right\rangle = -1;\ q_2^{zx} = \left\langle O_2^{zx} \right\rangle = 0$. Таким образом, полученное состояние описывается уже не векторным параметром порядка, а тензорным и, как было указано в предыдущих разделах, называется квадрупольным.

Равенство нулю векторного параметра порядка – намагниченности, существенно упрощает дальнейшие вычисления, в частности уровни энергии магнитного иона:

$$\begin{aligned} E_1 &= B_2^0(\theta_0) + B_2^2(\theta_0); \\ E_0 &= 2B_2^2(\theta_0); \\ E_{-1} &= B_2^0(\theta) + 3B_2^2(\theta). \end{aligned} \tag{3.35}$$

и волновые функции:

$$\begin{aligned} |\psi(1)\rangle &= \frac{|1\rangle - |-1\rangle}{\sqrt{2}}; \\ |\psi(0)\rangle &= |0\rangle; \\ |\psi(-1)\rangle &= \frac{|1\rangle + |-1\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Следующим шагом в изучении поведения исследуемой модели является получение спектров элементарных возбуждений, позволяющих определить динамические свойства, а также область устойчивости квадрупольного фазового состояния. Как уже было описано ранее, используя полный гамильтониан в виде $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}} + \mathcal{H}_{tr}$ построим функцию Грина, полюса которой определяют спектры связанных магнитоупругих волн. В квадрупольной фазе одноузельный гамильтониан и гамильтониан взаимодействия имеют такой же вид как в ферромагнитной фазе. Гамильтониан трансформации магнонов в фононы и обратно определяется выражением (3.16), в котором амплитуды трансформации имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&T_n^{11}(q,\varphi) = T_n^{-1-1}(q,\varphi) = i\nu T_n^0(q,\varphi)\left\{e_{\varphi q}^x q_x + e_{\varphi q}^y q_y + e_{\varphi q}^z q_z\right\};\\
&T_n^{00}(q,\varphi) = i\nu T_n^0(q,\varphi)\left\{e_{\varphi q}^x q_x + e_{\varphi q}^z q_z +\right.\\
&\left.+\left(e_{\varphi q}^x q_x - e_{\varphi q}^y q_y\right)\cos 2\theta - \left(e_{\varphi q}^x q_z + e_{\varphi q}^z q_x\right)\sin 2\theta\right\};\\
&T_n^{10}(q,\varphi) = T_n^{01}(q,\varphi) = \frac{i\nu}{2}T_n^0(q,\varphi)\times\\
&\times\left\{\left(e_{\varphi q}^x q_x - e_{\varphi q}^z q_z\right)\sin 2\theta + \left(e_{\varphi q}^x q_z + e_{\varphi q}^z q_x\right)\cos 2\theta\right\};\\
&T_n^{0-1}(q,\varphi) = -T_n^{-10}(q,\varphi) = -\frac{\nu}{2}T_n^0(q,\varphi)\times\\
&\left\{\left(e_{\varphi q}^x q_y - e_{\varphi q}^y q_x\right)\sin\theta + \left(e_{\varphi q}^z q_y + e_{\varphi q}^y q_z\right)\cos\theta\right\};\\
&T_n^{1-1}(q,\varphi) = -T_n^{-11}(q,\varphi) = \frac{\nu}{2}T_n^0(q,\varphi)\times\\
&\left\{\left(e_{\varphi q}^x q_y - e_{\varphi q}^y q_x\right)\cos\theta - \left(e_{\varphi q}^z q_y + e_{\varphi q}^y q_z\right)\sin\theta\right\};\\
&T_n^0(q,\varphi) = \frac{e^{i\mathbf{qn}}}{\sqrt{2m\omega_\varphi(q)}}.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Решение дисперсионного уравнения позволяет определить спектры связанных магнитоупругих волн. Учитывая явный вид параметров унитарных преобразований в (3.34), а также амплитуды трансформации (3.37) в квадрупольной фазе получим квазимагнонный спектр в виде:

$$\varepsilon_1^2(k) = E_{10}\left(E_{10} + 4\left[A_k^{32} - \operatorname{Re} A_k^{22}\right]\right) + \left(\operatorname{Im} A_k^{22}\right)^2; \tag{3.38}$$

$$\varepsilon_2^2(k) = E_{1-1}\left(E_{1-1} + 2A_k^{11}\sin^2|A|\right); \tag{3.39}$$

и спектр квазиакустических возбуждений:

$$\omega_1(k) = \omega_t(k); \quad \omega_2(k) = \omega_l(k); \quad \omega_3(k) = \omega_\tau(k). \tag{3.40}$$

Анализ спектров квазифононов (3.40) показывает, что акустические возбуждения любой поляризации остаются линейными по волновому вектору, и, более того, скорость звука остается неизменной. Таким образом, можно констатировать, что в квадрупольной фазе магнитная подсистема никак не влияет на динамические свойства упругой части и наоборот, что связано с равенством нулю намагниченности на узле.

Что касается спектров квазимагнонов, то очевидно, что выражение (3.39) описывает высокочастотную бездисперсионную ветвь. Поэтому дальнейшее наше внимание сфокусируем на низкочастотной ветви спектра (3.38). Учитывая явный вид энергетических уровней магнитного иона в квадрупольном фазовом состоянии (3.35) и компоненты матрицы (3.19), получим общий вид спектра в длинноволновом пределе:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2(k) &= \left\{ B_2^2(\theta_0) - B_2^0(\theta_0) \right\} \times \\ &\times \left\{ 2J_0 + \frac{2A_0}{3} + B_2^2(\theta_0) - B_2^0(\theta_0) + \Omega_0 k \sin^2\psi + \frac{J_0}{2} k^2 \right\} \end{aligned} \tag{3.41}$$

Как видно из (3.41) влияние магнитодипольного взаимодействия в квадрупольной фазе приводит не только к статической перенормировке спектра квазимагнонных возбуждений, но и к возникновению линейного по волновому вектору слагаемого. Однако, в отличие от ферромагнитного состояния, рассмотренного в предыдущем подразделе, это слагаемое при любой ориентации волнового вектора в базисной плоскости входит в спектр с тем же знаком, что и квадратичное. Таким образом, спектр квазимагнонов размягчается при $k = 0$, что объясняет отсутствие в квадрупольной фазе пространственной неоднородности.

Линию потери устойчивости квадрупольного состояния можно определить из равенства нулю энергетической щели спектра, но для произвольного соотношения между константами легкоплоскостной и наклонной анизотропий это является сложной задачей, решить которую аналитически невозможно. Поэтому явный вид спектров квазимагнонов и линию усточивости КУ фазы будем исследовать в двух предельных случаях: $\beta_{zx} \gg \beta$ и $\beta \gg \beta_{zx}$.

Когда энергия наклонной одноионной анизотропии превышает энергию легкоплоскостной одноионной анизотропии, то есть $\beta_{zx} \gg \beta$, явный вид спектра спиновой волны (3.41) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2(k) &= \frac{1}{2}\sqrt{4\beta_{zx}^2 + (\beta + 2a_0)^2} \times \\ &\times \left\{ 2J_0 + \frac{2A_0}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{4\beta_{zx}^2 + (\beta + 2a_0)^2} + \Omega_0 k \sin^2\psi + \frac{J_0}{2}k^2 \right\} \end{aligned} \tag{3.42}$$

а линия потери устойчивости квадрупольного фазового состояния в рассматриваемом диапазоне соотношений материальных параметров системы определяется выражением:

$$\beta_{zx}^{КУ1} = \frac{1}{2}\sqrt{16\left(J_0 + \frac{A_0}{3}\right)^2 - (\beta + 2a_0)^2} \tag{3.43}$$

В противоположном случае, когда наклонная одноионная энизотропия существенно меньше легкоплоскостной одноионной анизотропии, спектр квазимагнонов в длинноволновом пределе определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2(k) &= \frac{1}{2}\sqrt{4\beta_{zx}^2 + (\beta + 4a_0)^2} \times \\ &\times \left\{ 2J_0 + \frac{2A_0}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{4\beta_{zx}^2 + (\beta + 4a_0)^2} + \Omega_0 k \sin^2\psi + \frac{J_0}{2}k^2 \right\} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Тогда, с учетом явного вида спектра (3.48) при $\beta \gg \beta_{zx}$ получим линию потери устойчивости квадрупольного состояния:

$$\beta_{zx}^{КУ2} = \frac{1}{2}\sqrt{16\left(J_0 + \frac{A_0}{3}\right)^2 - (\beta + 4a_0)^2} \tag{3.45}$$

Аналогично случаю малых анизотропий, рассмотренный ранее, линию потери устойчивости квадрупольного состояния для произвольных соотношений между константами одноионных анизотропий получим с помощью численных методов, что будет отмечено далее на фазовой диаграмме.

Таким образом, полученные линии устойчивости для угловой ферромагнитной фазы (3.32) и (3.35), для квадрупольной фазы (3.47) и (3.49), а также проведенные численные решения позволяют построить фазовую диаграмму ультратонкой ферромагнитной пленки с комбинацией наклонной и легкоплоскостной одноионной анизотропией [205]. Но как было показано, влияние магнитодипольного взаимодействия приводит к возникновению в угловом ферромагнитном фазовом состоянии пространственной неоднородности, период которой существенно зависит не только от параметров системы, но и от направления волнового вектора в плоскости пленки. Как результат, линия потери устойчивости ферромагнитной фазы также зависит от угла ориентации волнового вектора. Поэтому построим фазовую диаграмму исследуемой системы для двух случаев.

Пусть волновой вектор $\vec{k}$ ориентирован вдоль оси OX, то есть $\psi = 0$. В этом случае фазовая диаграмма представлена на рис. 3.3, где

$$\begin{aligned}
&\beta_{zx}^{УФМ}(0) = 4\sqrt{\left(J_0 - \frac{A_0}{6} + \frac{3a_0}{8}\right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{J_0^2}\right) - \left(\frac{A_0}{4} + \frac{3a_0}{8}\right)^2};\\
&\beta_{zx}^{КУ}(0) = 2\sqrt{\left(J_0 + \frac{A_0}{3}\right)^2 - \frac{a_0^2}{4}};\\
&\beta^{УФМ}(0) = 4J_0 - \frac{59A_0}{3} - \left(J_0 + a_0\right)\frac{\Omega_0^2}{J_0^2};\\
&\beta^{КУ}(0) = 4\left(J_0 + \frac{A_0}{3} - a_0\right).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

На диаграмме сплошными линиями изображены аналитические решения для линий устойчивости, а пунктирными – численные решения.

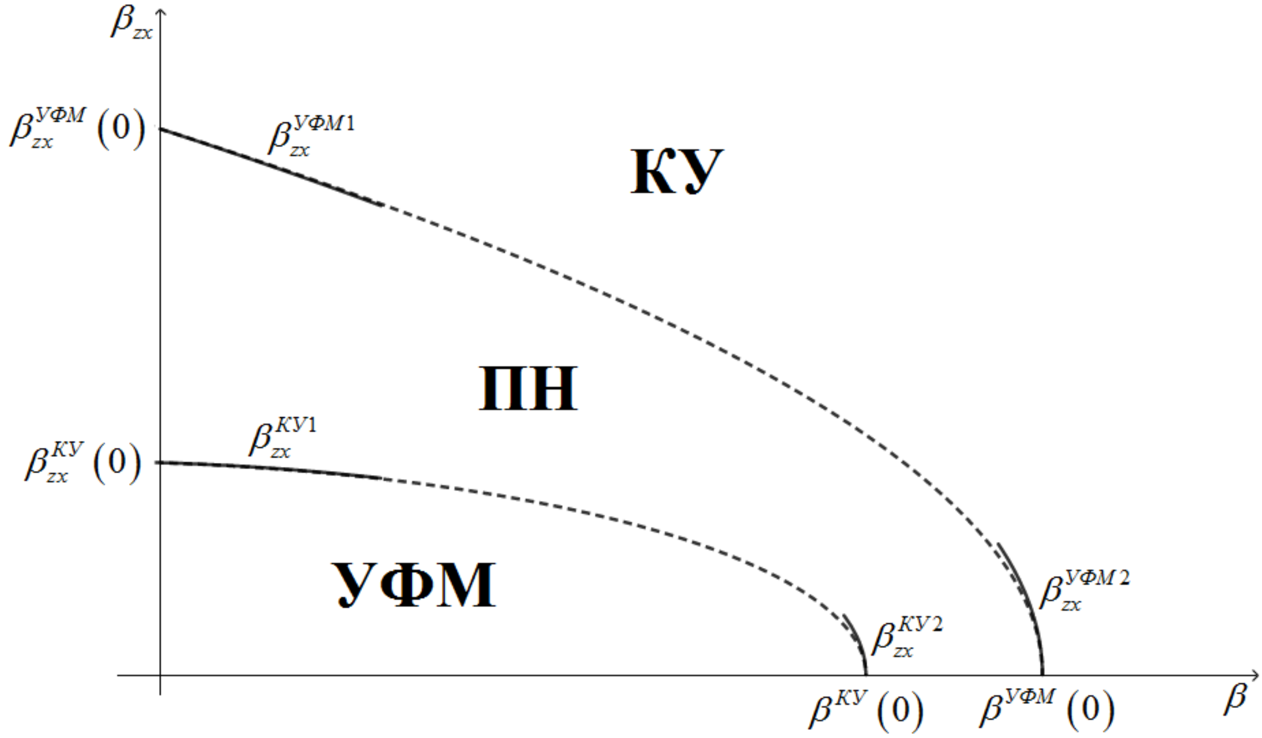

Рис. 3.3. Фазовая диаграмма ультратонкой ферромагнитной пленки с комбинацией легкоплоскостной и наклонной одноионных анизотропий при $\vec{k} \parallel OX$

Как видно из диаграммы линия потери устойчивости ферромагнитнй фазы находится выше линии устойчивости квадрупольной фазы. Следовательно, фазовый переход УФМ – КУ фаза происходит с гистерезисом линий потери устойчивости соответствующих фазовых состояний. Такое поведение характерно для фазовых переходов первого рода. Более того, необходимо отметить, что в области находящейся между линиями потери устойчивости указанных состояний реализуется промежуточной состояние в котором сосуществуют векторный и тензорный параметр порядка. В предыдущих разделах такое состояние называлось квадрупольно-ферромагнитным. Однако в случае учета магнитодипольного взаимодействия в данной области на фазовой диаграмме реализуется пространственно неоднородное состояние (доменная структура).

Для случая, когда волновой вектор ориентирован вдоль оси OY ($\psi = \dfrac{\pi}{2}$), фазовая диаграмма имеет качественно такой же вид (рис. 3.4), где

$$
\begin{aligned}
&\beta_{zx}^{УФМ}(0) = 4\sqrt{\left(J_0 - \frac{A_0}{6} + \frac{3a_0}{8}\right)^2 \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{4J_0^2}\right) - \left(\frac{A_0}{4} + \frac{3a_0}{8}\right)^2};\\
&\beta_{zx}^{КУ}(0) = 2\sqrt{\left(J_0 + \frac{A_0}{3}\right)^2 - \frac{a_0^2}{4}};\\
&\beta^{УФМ}(0) = 4J_0 - \frac{59A_0}{3};\\
&\beta^{КУ}(0) = 4\left(J_0 + \frac{A_0}{3} - a_0\right).
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

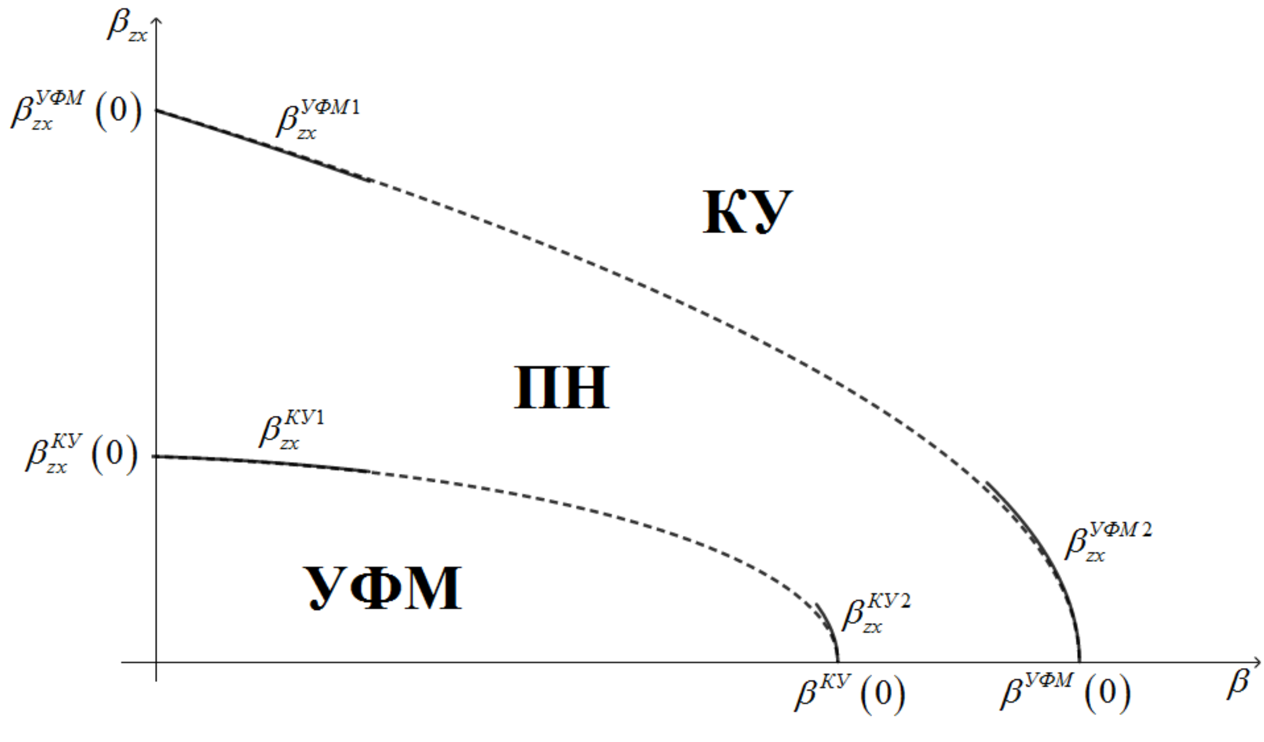

Рис. 3.4. Фазовая диаграмма ультратонкой ферромагнитной пленки с комбинацией легкоплоскостной и наклонной одноионных анизотропий при $\vec{k} \parallel OY$

Фазовый переход из ферромагнитного состояния в квадрупольное также проходит через область сосуществования фаз, в которой возникает пространственная неоднородность, что соответствует фазовому переходу первого рода. Однако при такой ориентации волнового вектора линия потери устойчивости угловой ферромагнитной фазы находится выше, в результате чего область существования доменной структуры увеличивается.

Основные результаты третьего раздела

1. Показано, что в ультратонкой ферромагнитной пленке с комбинацией легкоплоскостной и наклонной одноионных анизотропий в зависимости от соотношений между материальными параметрами могут быть реализованы два однородных состояния: угловое ферромагнитное фазовое состояние и кувадрупольное фазовое состояние.
2. В угловом ферромагнитном состоянии вектор намагниченности ориентирован в плоскости ZOX и составляет некоторый равновесный угол с осью OZ, значение которого определятся константами легкоплоскостной и наклонной анизотропий, спонтанными деформациями и параметром магнитодипольного взаимодействия. Магнитоупругое взаимодействие в УФМ фазе влияет только на статические свойства магнетика, и заключается в перенормировке энергетических уровней магнитного иона, спектров элементарных возбуждений, скоростей звука и линии устойчивости ферромагнитного состояния. Поскольку рассматриваемый фазовый переход не является переориентационным (угол ориентации магнитного момента определяется только константами анизотропий, параметрами магнитоупругого и магнитодимпольного взаимодействий и не меняется при фазовом переходе), то магнитоупругое взаимодействие не оказывает влияния на динамические свойства, то есть квазиакустическое возбуждение не размягчается. Следовательно, фазовый переход протекает по квазимагнонной ветви возбуждения.
3. Магнитодипольное взаимодействие также влияет на статические свойства в УФМ фазе, приводя к перенормировке энергетических уровней магнитного иона, спектров элементарных возбуждений и линии потери

устойчивости. Более того, диполь-дипольное взаимодействие приводит к возникновению в спектре квазимагнонов дополнительного линейного по волновому вектору слагаемого. Причем это слагаемое входит в явный вид спектра со знаком противоположным знаку стандартного квадратичного слагаемого. В результате чего, одному значению энергии возбуждений может соответствовать различные значения волнового вектора. Следовательно, в системе реализуется пространственно неоднородное состояние, для которого значение периода неоднородности существенно зависит от материальных параметров системы и от ориентации волнового вектора в базисной плоскости пленки.

4. В квадрупольном состоянии и магнитоупругое и магнитодипольное взаимодействия проявляются лишь в статической перенормировке, что связано с равенством нулю вектора намагниченности на узле.
5. Фазовый переход между ферромагнитным и квадрупольным однородными фазовыми состояниями является переходом первого рода и протекает через некоторое промежуточной состояние, которое в рассматриваемой системе является пространственно-неоднородным с доменной структурой. Поскольку данный фазовый переход не является переориентационным, то размягчения квазифононной ветви возбуждения не происходит, а фазовый переход протекает по низкочастотной квазимагнонной ветви.

Раздел 4. Фазовые состояния ультратонкой сильноанизотропной антиферромагнитной пленки с изингоподобным обменным взаимодействием

В последнее время, в связи с поиском новых квантовых состояний в магнетиках, возрос интерес к антиферромагнитным системам. Несколько лет назад было обнаружено «сверхтвердое» состояние для гелия ^4He [132, 133], а также для охлажденного до сверхнизких температур газа ионов рубидия [134]. В теории магнетизма также может наблюдаться подобное смешанное фазовое состояние, в котором сосуществуют параметры порядка антиферромагнитной и спин-флоп фаз [135]. Существование сверхтвердой магнитной фазы было доказано для квантовых магнитных систем [136-141]. Более того, одним из перспективных кандидатов для реализации сверхтвердого фазового состояния стали двухподрешеточные магнетики [143-149]. К таким системам относятся например, рассмотренные в работах [151, 152] $Ni(C_2H_8N_2)_2NO_2$ и $Ni(C_2H_8N_2)_2Ni(CN_4)$, однако сверхтвердое состояния в них не наблюдается. Последнее обстоятельство связано с тем, что данные материалы хоть и обладают легкоплоскостной одноионной анизотропией, ее значение недостаточно велико. В результате чего указанные материалы при низких температурах находятся в спонтанно упорядоченном состоянии и даже при малом внешнем магнитном поле все спины ориентируются в одном направлении, создавая ферромагнитное упорядочение. Таким образом, необходимо искать сверхтвердую магнитную фазы среди материалов с большой энергией легкоплоскостной анизотропии, в которых основную роль в формировании свойств системы играют отедльные спины [157, 158]. К таким материалам можно отнести $CsFeBr_3$ [153, 154], $RbFeBr_3$ [155] и $CsFeCl_3$ [156].

Кроме двухподрешеточных магнетиков с большой легкоплоскостной одноионной анизотропией, существование сверхтвердого фазового состояния было теоретически доказано для фрустрированных магнитных систем [30, 159]. Одним из наиболее простых примеров такой системы является двухподрешеточный антиферромагнетик с различными обменными взаимодействиями между узлами одной подрешетки и узлами разных подрешеток. Причем в такой системе могут возникать и другие фазовые состояния с уникальными свойствами (спиновая жидкость, магнитное плато) [30, 31, 159-161]. Существование всех упомянутых состояний было обнаружено в $Ba_2CoGe_2O_7$. Данный материал является частным случаем двухподрешеточного антиферромагнетика с изингоподобным обменным взаимодействием [159, 160]. Однако, как области существования этих фазовых состояний, так и типы фазовых переходов существенно отличаются друг от друга. Кроме того, необходимо учитывать влияние одноионной анизотропии на условия реализации этих фаз [31, 161].

Таким образом, исследования магнитных систем на предмет существования сверхтвердой магнитной фазы и условий ее реализации являются актуальными на сегодняшний день. Довольно много работ посвящено этой проблеме, в частности сверхтвердое состояние наблюдалось в двухподрешеточных антиферромагнетиках с легкоплоскостной одноионной анизотропией [162-164]. Однако все проводимые исследования касались только трехмерных образцов, но не ультратонких магнитных пленок. Следовательно, интересной задачей было бы рассмотреть возможность существования и условия реализации сверхтвердой магнитной фазы в ультратонких двухподрешеточных антиферромагнитных пленках с большой легкоплоскостной одноионной анизотропией. Более того, такую пленку можно с хорошей степенью точности считать двумерным объектом, что приводит к существенному проявлению магнитодипольного взаимодействия, влияние которого ранее также не исследовалось.

Данный раздел посвящен исследованию фазовых состояний, реализующихся в ультратонкой сильноанизотропной антиферромагнитной двухподрешеточной пленке со спином магнитного иона равным единице и изингоподобным фрустрированным обменным взаимодействием. Причем мы рассматриваем случай, в котором обменное взаимодействие между узлами одной подрешетки приводит к ферромагнитному упорядочению, в то время как обменное взаимодействие между узлами разных подрешеток приводит антиферромагнитному упорядочению.

В **первом подразделе** мы рассмотрим модель, описывающую исследуемую ультратонкую пленку, определим материальные параметры системы и соотношения между ними.

Во **втором подразделе** будут исследованы фазовые состояния и спектры магнонов в предельных случаях соотношений материальных параметров, а также будет учтено влияние магнитодипольного взаимодействия на свойства пленки.

В **третьем подразделе** мы рассмотрим возможность реализации сверхтвердой магнитной фазы в исследуемой системе, а также влияние магнитодипольного взаимодействия на статические и динамические свойства пленки и на условия реализации сверхтвердой фазы.

4.1. Модель ультратонкой пленки двухподрешеточного сильноанизотропного антиферромагнетика с изингоподобным обменным взаимодействием

Рассмотрим модель двумерного магнетика с двумя эквивалентными подрешетками. Схематически, кристаллическая решетка такой системы представлена на рис. 4.1. Как видно из рисунка, магнитные ионы формируют шахматное упорядочение, при котором расстояние между узлами одной подрешетки (пунктирная линия) превосходит расстояние между узлами разных подрешеток (сплошная линия). В итоге энергия обменного взаимодействия в подрешетке меньше, чем энергия обменного взаимодействия между подрешетками, что приводит к возникновению антиферромагнитного упорядочения в системе.

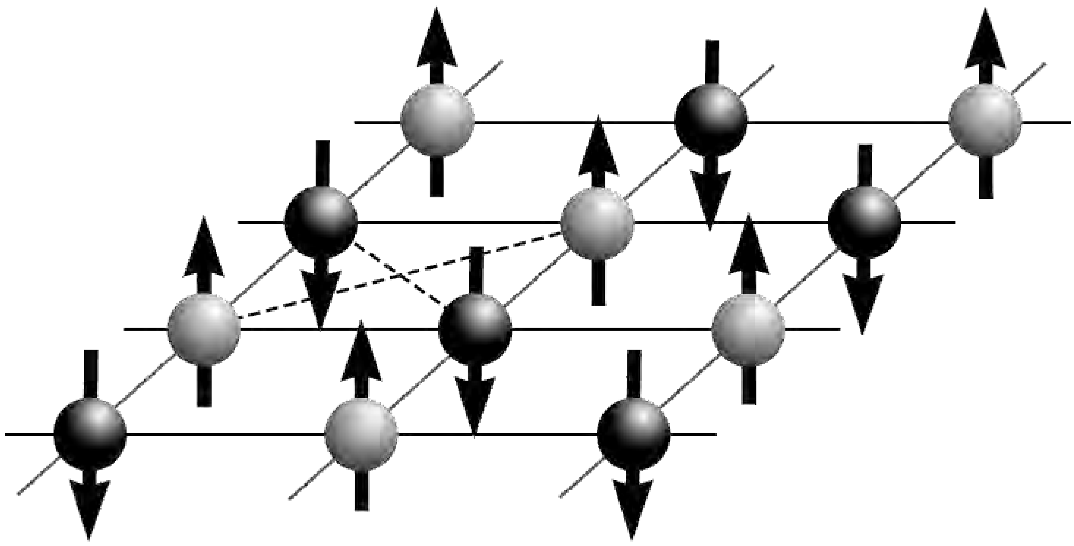

Рис. 4.1. Кристаллическая решетка двумерного двухподрешеточного изингоподобного антиферромагнетика со слабой одноионной анизотропией в отсутствие внешнего магнитного поля.

Как было сказано ранее, спин магнитного иона примем равным единице, поскольку это минимальное значение спина, при котором возникновение одноионной анизотропия вообще возможно. Кроме того предположим, что в системе реализуется анизотропия типа легкая плоскость с базисной плоскостью XOY. Также, предположим, что система находится во внешнем магнитном поле, направление которого перпендикулярно базисной плоскости, то есть направленном вдоль оси OZ. Такую модель можно описать следующим гамильтонианом:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{n,n'} J_{nn'} S_n^z S_{n'}^z - \frac{1}{2}\sum_{\substack{n,n'\\ i,j}} V_{nn'}^{ij} S_n^i S_{n'}^j + \frac{1}{2}\sum_{n,m} \tilde{J}_{nm} S_n^z S_m^z - \frac{1}{2}\sum_{\substack{n,m,\\ i,j}} \tilde{V}_{nm}^{ij} S_n^i S_m^j + \\ +\beta\sum_n (S_n^z)^2 - H\sum_n S_n^z \qquad (4.1)$$

где $J_{nn'}$ – обменный интеграл описывающий ферромагнитное взаимодействие узлов внутри подрешетки, $\tilde{J}_{nn'}$ – обменный интеграл описывающий антиферромагнитное взаимодействие узлов между подрешетками, $V_{nn'}^{ij}$ и $\tilde{V}_{nn'}^{ij}$ – компоненты тензоров магнитодипольного взаимодействия спинов в подрешетке и между подрешетками соответственно, $\beta > 0$ – константа легкоплоскостной одноионной анизотропии, H – внешнее магнитное поле в энергетических единицах, S_n^i – *i*-ая проекция спинового оператора в узле *n*. Явный вид компонент тензора магнитодипольного взаимодействия удобно записать в виде Фурье-образа следующим образом [109]:

$$\begin{aligned}
&V_k^{xx} = \frac{A_0}{3} - \Omega_0 k \cos^2\psi; \qquad V_k^{yy} = \frac{A_0}{3} - \Omega_0 k \cos^2\psi;\\
&V_k^{zz} = -\frac{2A_0}{3} + \Omega_0 k; \qquad V_k^{xy} = V_k^{yx} = -\frac{\Omega_0}{2} k \sin 2\psi;\\
&V_k^{yz} = V_k^{zy} = V_k^{zx} = V_k^{xz} = 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где $A_0 = \frac{3}{2}\left(g\mu_Б\right)^2 \sum\limits_{R\neq 0} R^{-3}$ и $\Omega_0 = \frac{2\pi\left(g\mu_Б\right)^2}{a^2}$ – параметры магнитодипольного взаимодействия, $\mu_Б$ – магнетон Бора, g – гиромагнитное отношение, a^2 – «объем» плоской ячейки подрешетки, $\vec{k}$ – волновой вектор, ориентированный в базисной плоскости, ψ – угол между волновым вектором и осью OX. Такой выбор ориентации волнового вектора в базисной плоскости был сделан для упрощения последующих вычислений, однако это не снижает общности дальнейших исследований. Для компонент тензора магнитодипольного взаимодействия между узлами различных подрешеток Фурье-образы имеют вид аналогичный (4.2), с учетом замены параметров магнитодипольного взаимодействия A_0 и Ω_0 на $\tilde{A}_0$ и $\tilde{\Omega}_0$, соответствующие межподрешеточному магнитодипольному взаимодействию. Более того, из вида кристаллической решетки (рис. 4.1) легко сделать вывод, что $A_0 < \tilde{A}_0$ и $\Omega_0 < \tilde{\Omega}_0$.

Также, в дальнейшем мы будем предполагать, что энергия обменного взаимодействия существенно меньше, энергии одноионной анизотропии. Таким образом, в исследуемой модели имеет место следующее соотношение материальных параметров: $\beta \gg \tilde{J}_0 > J_0 \gg \tilde{A}_0, \tilde{\Omega}_0 > A_0, \Omega_0$. Внешнее магнитное поле H может принимать различные значения, то есть является изменяемым параметром.

Необходимо отметить, что все последующие исследования будут проводиться в низкотемпературном пределе, при температурах много меньших температуры Нееля ($T \ll T_N$), где исследуемые эффекты проявляются наиболее сильно.

4.2. Однородные фазовые состояния

Рассмотрим поведение исследуемой системы в случае, когда внешнее магнитное поле настолько велико, что зеемановская энергия существенно превосходит энергию одноионной анизотропии и другие взаимодействия. То есть реализуется следующее соотношение между параметрами: $H \gg \beta \gg \tilde{J}_0 > J_0 \gg \tilde{A}_0, \tilde{\Omega}_0 > A_0, \Omega_0$. Очевидно, что при такой конфигурации параметров системы, магнитные моменты всех узлов обеих подрешеток ориентируются по направлению магнитного поля. Тогда, выделяя среднее поле, можно переписать гамильтониан (4.1) в виде суммы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}$, где $\mathcal{H}_{\text{int}}$ – гамильтониан взаимодействия, а $\mathcal{H}_0$ – одноузельный гамильтониан, имеющий следующий вид:

$$\mathcal{H}_0 = -\left\{ H + \left[J_0 - \frac{2}{3}A_0 - \frac{1}{2}\left(\tilde{J}_0 + \frac{2}{3}\tilde{A}_0\right)\right]\left\langle S^z \right\rangle \right\} \sum_n S_n^z + \beta \sum_n \left(S_n^z\right)^2 \qquad (4.3)$$

Необходимо отметить, что использование приближения среднего поля является обоснованным для данного случая, так как мы исследуем поведение системы в области низких температур, когда температурные флуктуации пренебрежимо малы, и, как следствие, не влияют на состояние системы. Более того, учет магнитодипольного взаимодействия, а также влияние внешнего магнитного поля обеспечивают сходимость интеграла флуктуаций для всех однородных состояний, что приводит к конечности квантовых флуктуаций [109, 118, 185, 192]. Таким образом, в рассматриваемой модели нельзя применить теорему Мермина-Вагнера о реализации дальнего порядка в двумерных системах. Кроме того, приближение среднего поля, можно использовать для систем любой размерности, что было доказано в работах [157, 158]. Также в работе [136], было показано, что для модели Гейзенберга со спином магнитного иона равным $\frac{1}{2}$, обладающей фрустрированным обменным взаимодействием, приближение среднего поля дает правильные результаты для сверхтвердого магнитного состояния.

Решая стационарное уравнение Шредингера с гамильтонианом (4.3), получим, что энергетические уровни магнитного иона равны:

$$\begin{aligned} &E_{1,-1} = \mp H + \beta \mp \left[J_0 - \frac{2}{3} A_0 - \frac{1}{2}\left(\tilde{J}_0 + \frac{2}{3}\tilde{A}_0 \right) \right] \left\langle S^z \right\rangle; \\ &E_0 = 0; \end{aligned} \tag{4.4}$$

а собственные функции гамильтониана (4.3) имеют вид:

$$\left|\psi(1)\right\rangle = \left|1\right\rangle; \quad \left|\psi(0)\right\rangle = \left|0\right\rangle; \quad \left|\psi(-1)\right\rangle = \left|-1\right\rangle. \tag{4.5}$$

Из выражения для энергетических уровней (4.4) следует, что когда внешнее магнитное поле настолько велико, что зеемановская энергия превосходит энергии других взаимодействий, то нижайшим энергетическим уровнем становится уровень E_1, а волновая функция $\left|\psi(1)\right\rangle = \left|1\right\rangle$ – описывает основное состояние системы. Используя описанную ранее технику операторов Хаббарда, получим связь спиновых операторов с операторами Хаббарда в следующем виде:

$$\begin{aligned} &S^z = X^{11} - X^{-1-1}; \\ &S^+ = \sqrt{2}\left(X^{10} + X^{0-1} \right); \\ &S^- = \left(S^+ \right)^+. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае большого внешнего магнитного поля, среднее значение намагниченности на узле равно единице (

$\left\langle S^z \right\rangle = 1$). Известно, что такое значение параметра порядка соответствует ферромагнитному состоянию, обусловленному, в данном случае, сильным магнитным полем.

Для исследования динамических свойств системы необходимо рассмотреть спектры элементарных возбуждений, являющиеся полюсами функции Грина системы. Процедура получения функции Грина достаточно подробно описана в первом разделе. В терминах операторов Хаббарда одноузельный гамильтониан диагонален $\mathcal{H}_0 = \sum_i E_i X^{ii}$, а гамильтониана взаимодействия в терминах операторов Хаббарда можно представить в виде:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{n,n' \\ \alpha,\delta}} \left\{ \vec{c}(\alpha) \hat{B}_{nn'} \vec{c}(\delta) \right\} X_n^{\alpha} X_{n'}^{\delta} \tag{4.7}$$

где компоненты вектора $\vec{c}(\alpha)$ определяются из связей спиновых операторов с операторами Хаббарда (4.6), а $\hat{B}_{nn'}$ – матрица, которую можно записать в блочном виде $\hat{B}_{nn'} = B_{11} \otimes \hat{B}_{22}$, причем

$$B_{11} = J_{nn'} - \frac{\tilde{J}_{nn'}}{2} + V_{nn'}^{zz} + \tilde{V}_{nn'}^{zz} \tag{4.8}$$

$$\hat{B}_{22} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

где $b_{11} = b_{22}^* = V_{nn'}^{xx} + \tilde{V}_{nn'}^{xx} - V_{nn'}^{yy} - \tilde{V}_{nn'}^{yy} - 2i\left(V_{nn'}^{xy} + \tilde{V}_{nn'}^{xy}\right)$ и $b_{12} = b_{21} = V_{nn'}^{xx} + \tilde{V}_{nn'}^{xx} + V_{nn'}^{yy} + \tilde{V}_{nn'}^{yy}$.

Решая уравнение типа Ларкина на функцию Грина, получим дисперсионное уравнение, решение которого позволяет определить спектры магнонов в ферромагнитной фазе. Тогда, в длинноволновом пределе ($k \to 0$) магнонный спектр имеет вид:

$$\varepsilon_{FM}^2(k) = \left(H - \beta + J_0 - \frac{\tilde{J}_0}{2} - A_0 - \frac{2}{3}\tilde{A}_0 \right)^2 + \\ + \left(H - \beta + J_0 - \frac{\tilde{J}_0}{2} - A_0 - \frac{2}{3}\tilde{A}_0 \right)\left(\Omega_0 + \tilde{\Omega}_0\right)k \tag{4.10}$$

Необходимо отметить, что зависимость энергии возбуждения от волнового вектора имеет корневой вид, что обусловлено влиянием магнитодипольного взаимодействия. Данный факт является важным, поскольку такой вид спектра обеспечивает сходимость интеграла флуктуаций и, как следствия, стабилизирует дальний магнитный порядок. Также, легко видеть, что в отсутствие магнитодипольного взаимодействия спектр (4.10) становится бездисперсионным. Такое поведение характерно для систем с изингоподобным обменным взаимодействием. Однако, в случае, когда внешнее магнитное поле направлено так, что приводит к нарушению симметрии системы (например перпендикулярно оси OZ), то возникает дисперсия магнонов и для систем с изингоподобным обменным взаимодействием [206].

Анализ спектра (4.10) показывает, что выбор ориентация волнового вектора в базисной плоскости пленки никак не влияет на энергию магнонов. Более того, минимум энергии наблюдается при $k = 0$. Тогда, линию потери устойчивости ферромагнитного состояния определим из равенства нулю энергетической щели спектра (4.10):

$$H_{FM}^C = \beta - J_0 + \frac{\tilde{J}_0}{2} + A_0 + \frac{2}{3}\tilde{A}_0 \tag{4.11}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что учет влияния магнитодипольного взаимодействия приводит к изменению закона дисперсии элементарных возбуждений в ферромагнитном состоянии. Однако, в случае сильных магнитных полей неоднородных состояний не возникает. Следовательно, влияние магнитодипольного взаимодействия приводит лишь к статической перенормировке линии потери устойчивости ферромагнитной фазы, в результате чего наблюдается уменьшение области ее существования, по отношению к результатам для объемных моделей.

Теперь, исследуем статические и динамические свойства двумерного сильноанизотропного изингоподобного антиферромагнетика в случае достаточно слабого внешнего магнитного поля, то есть когда энергия одноионной анизотропии превосходит и зеемановскую энергию и энергию прочих взаимодействий ($\beta \gg H$). При этом соотношение между магнитным полем H и обменными интегралами $J_0, \tilde{J}_0$ мы заранее не обговариваем, считая его произвольным. В таком случае магнитные моменты узлов обеих подрешеток ориентируются в базисной плоскости пленки.

Решение одноузельной задачи с гамильтонианом (4.3) позволяет определить спектр энергии и собственные функции магнитного иона, которые в точности совпадают с выражениями (4.4) и (4.5) соответственно. Однако, очевидно, что в исследуемом диапазоне соотношений параметров системы нижайшим энергетическим уровнем становится уровень E_0. То есть в системе наблюдается инверсия энергетических уровней, и, как следствие, основное состояние описывается волновой функцией $\left|\psi(0)\right\rangle = \left|0\right\rangle$. Тогда из выражения (4.6), устанавливающего связь между спиновыми операторами и операторами Хаббарда, следует, что среднее значение вектора намагниченности на один узел обращается в нуль ($\left\langle S^z \right\rangle = 0$). Таким образом получено фазовое состояние системы с нулевой намагниченностью. Причем, данное состояние не является парамагнитным, поскольку компоненты тензора квадрупольных моментов отличны от нуля

$$q_2^0 = -2; \quad q_2^2 = q_2^{xy} = q_2^{yz} = q_2^{zx} = 0 \tag{4.12}$$

Здесь $q_2^i = \left\langle O_{2n}^i \right\rangle$, $O_{2n}^0 = 3\left(S_n^z\right)^2 - S\left(S+1\right)$, $O_{2n}^2 = \left(S_n^x\right)^2 - \left(S_n^y\right)^2$, $O_{2n}^{ij} = \left[S_n^i, S_n^j\right]_+$ – операторы Стивенса. Следовательно, в данном состоянии, в отличие от ферромагнитной фазы, система описывается не векторным параметром порядка – намагниченностью, а тензорным параметром порядка – тензором квадрупольных моментов. В дальнейшем это состояние будем называть квадрупольным. Геометрическим образом квадрупольной фазы является эллипсоид вращения, главная ось которого ориентирована в плоскости XOY [207, 208].

С учетом того, что среднее значение спина на узле равно нулю, вид энергетических уровней магнитного иона (4.4) существенно упрощается. Тогда получим следующие формулы для энергетического спектра магнитного иона в квадрупольной фазе:

$$\begin{aligned} &E_{1,-1} = \beta \mp H; \\ &E_0 = 0; \end{aligned} \tag{4.13}$$

Дисперсионное уравнение, определяющие спектры справедливо при любых соотношениях между материальными параметрами, и, следовательно, позволяет определить спектры магнонов для квадрупольной фазы в длинноволновом пределе в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{QU}^2(k) = \beta^2 + H^2 - 4\beta\left\{\frac{2}{3}\left(A_0 + \tilde{A}_0\right) + \left(\Omega_0 + \tilde{\Omega}_0\right)k\right\} - \\ &-2H\beta\sqrt{1 - \frac{8}{3}\frac{A_0 + \tilde{A}_0}{\beta} + \frac{4}{9}\frac{A_0^2 + \tilde{A}_0^2}{H^2} + 4\frac{\Omega_0 + \tilde{\Omega}_0}{\beta}k + \frac{4}{3}\frac{\left(A_0 + \tilde{A}_0\right)\left(\Omega_0 - \tilde{\Omega}_0\right)}{H^2}k} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Из (4.14) видно, что спектр элементарных возбуждений, аналогично ферромагнитной фазе, имеет корневую зависимость от волнового вектора. Причем дисперсия магнонов обусловлена лишь магнитодипольным взаимодействием. Более того, энергия возбуждения не зависит от направления волнового вектора в базисной плоскости пленки, а ее минимум наблюдается при $k = 0$. Тогда из равенства нулю энергетической щели спектра элементарных возбуждений, получим линию потери устойчивости исследуемого квадрупольного состояния:

$$H_{QU}^C = \beta - \frac{2}{3}\left(A_0 + 3\tilde{A}_0\right) \tag{4.15}$$

Таким образом в квадрупольной фазе также не наблюдается пространственных неоднородностей, а влияние магнитодипольного взаимодействия приводит лишь к статической перенормировке спектров элементарных возбуждений и линии устойчивости, уменьшая область существования квадурпольного состояния, по сравнению с трехмерными системами (без учета магнитодипольного взаимодействия).

4.3. Сверхтвердая магнитная фаза

Наиболее интересным в дальнейшем исследовании поведения системы является случай когда внешнее магнитное поле принимает промежуточное значение между линиями потери устойчивости однородных фаз (ферромагнитной и квадрупольной), то есть $H_{QU}^{C} < H < H_{FM}^{C}$. При таком соотношении параметров системы, конкуренция внешнего магнитного поля, обменных взаимодействий между узлами одной подрешетки и между узлами разных подрешеток, а также одноионная анизотропия усиленная магнитодипольным взаимодействием приводит к ориентации магнитных моментов не параллельно внешнему полю, а под некоторым углом к нему. При этом важным является тот факт, что антиферромагнитное упорядочение в системе обуславливает различное отклонение магнитных моментов от оси квантования для узлов разных подрешеток. Поэтому предположим, что магнитные моменты подрешеток ориентированы под разными углами по отношению к направлению внешнего магнитного поля.

Для дальнейшего описания модели введем две системы координат, связанные с подрешетками. Схематично исследуемая модель изображена на рис. 4.2. Как изображено на рисунке, намагниченность первой подрешетки лежит под некоторым углом ϑ_1 к оси квантования OZ (направление внешнего магнитного поля), а намагниченность второй подрешетки составляет угол ϑ_2 с осью OZ. При этом системы координат выберем так, что бы намагниченности обеих подрешеток лежали в плоскости ZOX. Такой выбор является вполне обоснованным, поскольку легкоплоскостная анизотропия, влияние которой и

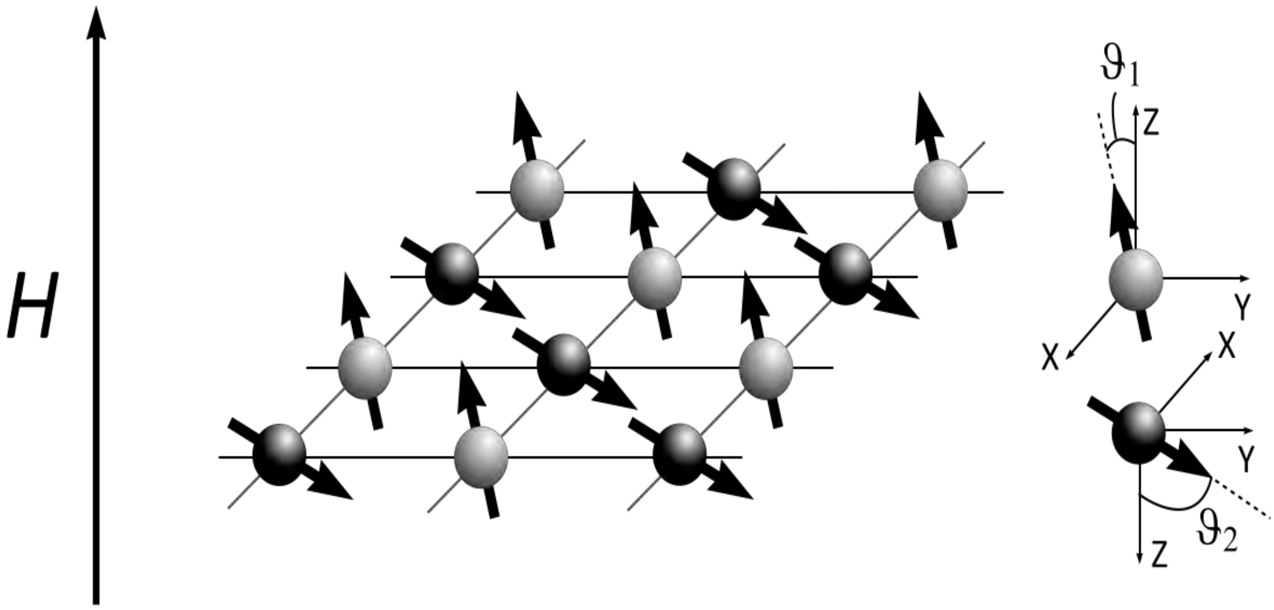

Рис. 4.2. Кристаллическая решетка двумерного двухподрешеточного изингоподобного антиферромагнетика с одноионной анизотропией.

приводит к отклонению вектора намагниченности от оси OZ, не определяет его направления в базисной плоскости. В результате, такая организация модели существенно упрощает дальнейшее рассмотрения.

Как уже было описано в первом разделе, удобно описывать систему в подвернутой системе координат, когда намагниченность лежит вдоль оси квантования. Для перехода к такому описанию сделаем унитарное преобразование вида $U\left(\vartheta_j\right)=\prod_n \exp\left[i\vartheta_j S_n^y\right]$ для каждой подрешетки ($j=1,2-$ номер подрешетки). Такое преобразование описывает поворот системы координат на угол ϑ_j вокруг оси OY. Для дальнейшего определения статических и динамических свойств системы в сверхтвердом состоянии удобно переписать полный гамильтониан системы в терминах операторов Хаббарда. Тогда, с учетом выражений (4.6) можно представить гамильтониан (4.1) как сумму двух слагаемых, первой из которых является диагональным по операторам Хаббарда ($\mathcal{H}_{diag} \sim X^{MM}$), а второе – недиагональным ($\mathcal{H}_{nondiag} \sim X^{MM'}$).

Однако, после проделанных унитарных преобразований, гамильтониан (4.1) принимает в терминах операторов Хаббарда достаточно громоздкий вид. Поэтому выделение одноузельного гамильтониана и решение с ним уравнение Шредингера становится сложной задачей. Более удобным методом, в данном случае является метод бозонизации операторов Хаббарда [187], основная идея которого состоит в построении аналога гамильтониана системы в терминах бозевских операторов. Таким образом необходимо связать операторы Хаббарда с операторами рождения и уничтожения так, чтобы матричные элементы гамильтониана совпадали. Однако, в данном методе возникает проблема, суть которой состоит в том, что гильбертово пространство операторов рождения и уничтожения бесконечномерное, в то время как размерность пространства операторов Хаббарда для спина $S=1$ равна трем. Данную проблему возможно решить с помощью введения псевдохаббардовских операторов, действующих в пространстве бесконечной размерности и связанных как с операторами рождения и уничтожения квазичастиц, так и с операторами Хаббарда. Использование данного метода позволяет записать полный гамильтониан системы (4.1) в терминах бозе-операторов рождения и уничтожения отдельно для каждой подрешетки в форме суммы:

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i^{(1)} + \mathcal{H}_i^{(2)} \tag{4.16}$$

где первое слагаемое $\mathcal{H}_i^{(1)}$ – содержит только члены линейные по бозе-операторам рождения и уничтожения, а второе слагаемое $\mathcal{H}_i^{(2)}$ – имеет смысл гамильтониана идеального газа магнонов. Хорошо известно, что средние значения от слагаемых линейных по бозе-операторам обращаются в нуль, то есть, данные слагаемые не несут никакого физического смысла. Это означает, что для исключения их из полного гамильтониана примем амплитуды при данных слагаемых равными нулю. Тогда получим систему уравнений относительно равновесных значений углов ориентации векторов намагниченности относительно внешнего магнитного поля ϑ_1 и ϑ_2 для обеих подрешеток:

$$\begin{cases} H - \beta\cos\vartheta_1 + \left(J_0 - A_0\right)\cos^2\vartheta_1 + \dfrac{1}{2}\left(\tilde{J}_0 - \dfrac{2\tilde{A}_0}{3} - \dfrac{\tilde{A}_0}{6}\dfrac{\sin\vartheta_2}{\sin\vartheta_1}\right)\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 = 0 \\ H - \beta\cos\vartheta_2 + \left(J_0 - A_0\right)\cos^2\vartheta_2 - \dfrac{1}{2}\left(\tilde{J}_0 + \dfrac{2\tilde{A}_0}{3} + \dfrac{\tilde{A}_0}{6}\dfrac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2}\right)\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 = 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

Полученная выше система уравнений (4.17) имеет достаточно громоздкое аналитическое решения, поэтому получить выражения для равновесных углов ϑ_1 и ϑ_2 становится трудной задачей. Поэтому проще построить численное решение, вид которого удобно изобразить на графике (рис. 4.3). Легко видеть, что вектор намагниченности первой подрешетки ориентируется вдоль оси OZ

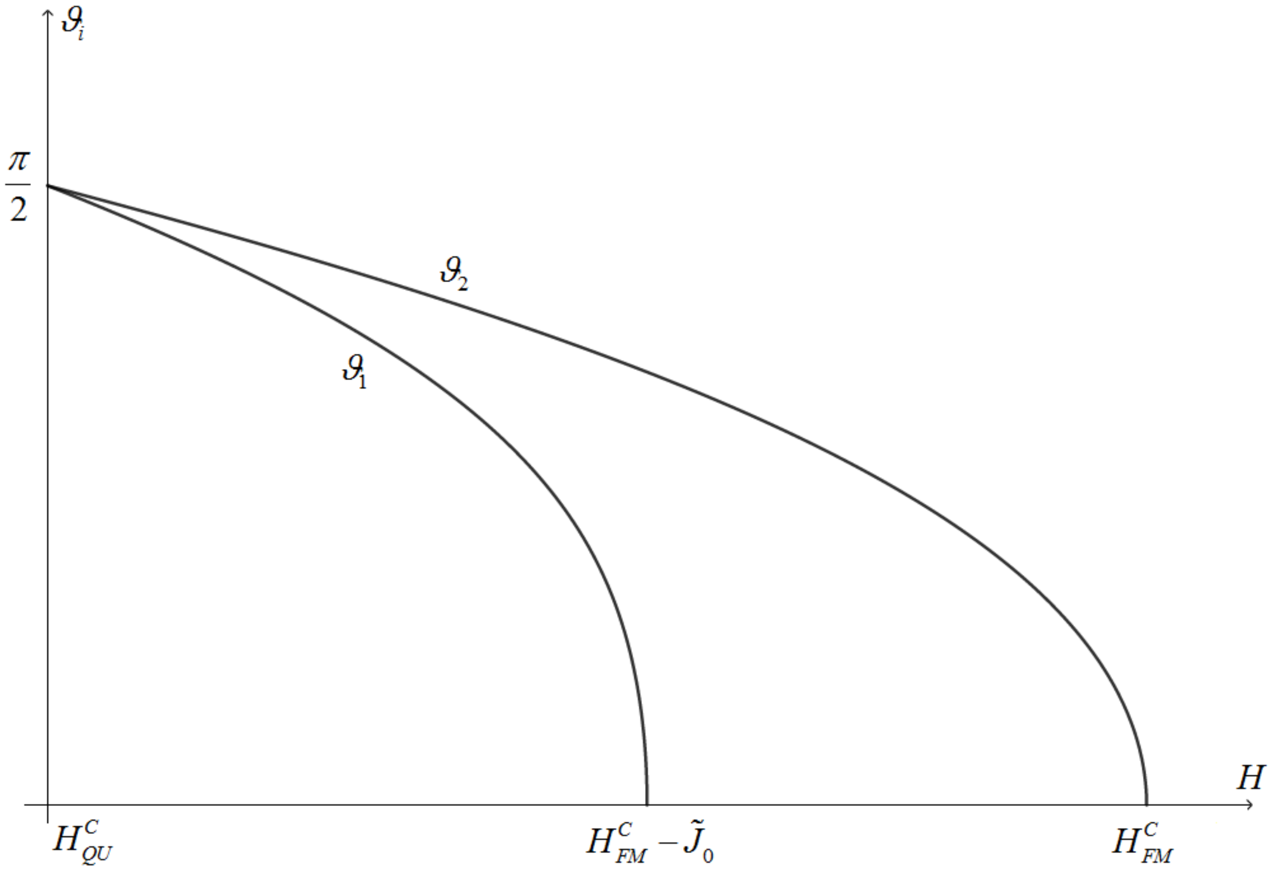

Рис. 4.3. Качественная зависимость равновесных углов ориентации намагниченности подрешеток от внешнего магнитного поля

при меньших значениях внешнего магнитного поля, чем вектор намагниченности второй подрешетки. Это связано с тем, что если магнитному моменту первой подрешетки энергетически выгодно ориентироваться вдоль направления магнитного поля, то антиферромагнитное упорядочение между узлами различных подрешеток приводит к тому, что магнитный момент второй подрешетки стремится ориентироваться в противоположном направлении, отклоняя его на еще больший угол. Более того, необходимо отметить, что значение поля, при котором магнитные моменты всех узлов ориентируются вдоль перпендикулярно базисной плоскости, в точности совпадает с линией потери устойчивости ферромагнитной фазы (4.11). То есть, полученные для сверхтвердой фазы результаты хорошо согласуются с данными для однородных состояний, и в предельном случае переходят друг в друга.

Для определения динамических свойств системы в сверхтвердой магнитной фазе приведем отличный от нуля гамильтониан идеального магнонного газа к диагональному виду используя стандартное преобразование $u-v$. Тогда:

$$\mathcal{H}_i^{(2)} = \sum_k \varepsilon_{SS1}^i(k)\alpha_k^\dagger\alpha_k + \sum_k \varepsilon_{SS2}^i(k)\gamma_k^\dagger\gamma_k \tag{4.18}$$

В выражении для гамильтониана (4.18) введены следующие обозначения: $\varepsilon_{SS1}^i(k)$ и $\varepsilon_{SS2}^i(k)$ – высокочастотная и низкочастотная ветвь спектра квазимагнонов соответственно, $\alpha_k^\dagger$ и α_k – бозе-операторы описывающие переход между состояниями E_1 и E_0, $\gamma_k^\dagger$ и γ_k – бозе-операторы описывающие переход между состояниями E_1 и E_{-1}, i – номер подрешетки. Явный вид спектров для произвольного соотношения между параметрами системы найти невозможно ввиду крайней степени нелинейности уравнений. Однако вблизи линии потери устойчивости ферромагнитной фазы можно вычислить низкочастотную ветвь спектра квазимагнонов в следующей форме:

$$\left(\varepsilon_{SS1}^{i}\right)^{2}=\left\{H-\beta+J_{0}+(-1)^{j}\frac{\tilde{J}_{0}}{2}-A_{0}-\frac{2\tilde{A}_{0}}{3}+\right.$$
$$\frac{1}{4}\Big[\left(\Omega_{0}\cos\vartheta_{i}-\tilde{\Omega}_{0}\cos\vartheta_{j}\right)\cos\vartheta_{i}\cos^{2}\psi+$$
$$\left.+3\left(\Omega_{0}+\tilde{\Omega}_{0}\right)\sin^{2}\psi\Big]k+\frac{1}{8}\Big[J_{0}\sin\vartheta_{i}+(-1)^{i}\tilde{J}_{0}\sin\vartheta_{j}\Big]k^{2}\right\}\times$$
$$\times\left\{H-\beta+J_{0}+(-1)^{j}\frac{\tilde{J}_{0}}{2}-A_{0}-\frac{\tilde{A}_{0}}{6}+\right. \tag{4.19}$$
$$+\frac{1}{4}\Big[3\left(\Omega_{0}\cos\vartheta_{i}-\tilde{\Omega}_{0}\cos\vartheta_{j}\right)\cos\vartheta_{i}\cos^{2}\psi+$$
$$\left.+\left(\Omega_{0}+\tilde{\Omega}_{0}\right)\sin^{2}\psi\Big]k+\frac{3}{8}\Big[J_{0}\sin\vartheta_{i}+(-1)^{i}\tilde{J}_{0}\sin\vartheta_{j}\Big]k^{2}\right\}$$

где $i,j=1,2$ – номер подрешетки, причем $i\neq j$. Как хорошо видно из (4.19) в сверхтвердом состоянии наблюдается дисперсия магнонов, обусловленная не только магнитодипольным взаимодействием, как было получено для однородных состояний, но и обменным взаимодействием. Данный факт объясняется тем, что вследствие отклонения вектора намагниченности от оси квантования, внешнее поле приводит к нарушению симметрии системы

Рассмотрим теперь спектр (4.19) вблизи линии устойчивости ферромагнитного состояния, то есть когда углы ϑ_1 и ϑ_2 являются малыми, практически равными нулю. Тогда, в рассматриваемой области минимум энергии возбуждения наблюдается при нулевом значении волнового вектора, а линию потери устойчивости сверхтвердой магнитной фазы определим из равенства нулю энергетической щели в спектре. Однако для разных подрешеток спектр становится неустойчивым при разных значениях магнитного поля, причем первая подрешетка теряет устойчивость при меньшем H. Поэтому в качестве линии потери устойчивости сверхтвердого состояния выберем значение поля для второй подрешетки:

$$H_{SS}^{C} = \beta - J_0 + \frac{\tilde{J}_0}{2} + A_0 + \frac{2\tilde{A}_0}{3} \tag{4.20}$$

Очевидно, что выражение (4.20) в точности совпало с линией потери устойчивости ферромагнитного состояния (4.11). Данный факт указывает на то, что поле (4.20) определяет не только линии устойчивости ферромагнитного и сверхтвердого состояний, но и является полем фазового перехода между этими состояниями. Кроме того, можно сделать заключение, что данный фазовый переход является фазовым переходом второго рода. Данный результат хорошо согласуется с проделанным ранее анализом решения системы уравнений (4.17) для углов ориентации магнитных моментов подрешеток.

Если же рассмотреть спектр элементарных возбуждений в сверхтвердом состоянии (4.17) при произвольных значениях углов ϑ_1 и ϑ_2, то очевидно, что энергия возбуждения будет существенно зависеть от направления волнового вектора в базисной плоскости. Так от значения угла ψ между направлением волнового вектора и осью OX существенно зависит знак линейного по волновому вектору слагаемого. Когда данное слагаемое становится отрицательным, энергия возбуждения будет принимать одинаковые значения при разных значениях k, то есть спектр (4.17) становится неоднородным. В этом случае минимум энергии возбуждения наблюдается уже не при $k = 0$, а при некотором критическом значении волнового вектора $k = k^*$, которое имеет вид для i –ой подрешетки:

$$k_i^* = \frac{\left(\tilde{\Omega}_0 \cos 2\psi - \Omega_0\right)}{\left\{J_0 + (-1)^i \tilde{J}_0\right\}\sin\vartheta_i + \dfrac{3\left(\tilde{\Omega}_0 \cos 2\psi - \Omega_0\right)^2 + \left(\Omega_0^2 - \tilde{\Omega}_0^2\right)\sin^2 2\psi}{8\left\{H - D + J_0 + \dfrac{(-1)^j}{2}\tilde{J}_0 - A_0 - \dfrac{7\tilde{A}_0^2}{12}\right\}}} \tag{4.21}$$

Легко видеть, что период неоднородности $\frac{1}{k^*}$, зависит не только от угла ориентации волнового вектора в плоскости пленки, но и от соотношения между материальным параметрами системы. Анализ выражения (4.21) показывает, что период неоднородности для обеих подрешеток является положительным только при выполнении условия: $\tilde{\Omega}_0 \cos 2\psi > \Omega_0$. Исходя из данного соотношения параметров магнитодипольного взаимодействия получим условие для угла ориентации волнового вектора ψ, при котором спектр (4.17) становится неоднородным:

$$\cos 2\psi > \frac{\Omega_0}{\tilde{\Omega}_0}, \qquad \tilde{\Omega}_0 \geq \Omega_0 \tag{4.22}$$

Следовательно при соблюдении выполнения условия (4.22) система находится в пространственно неоднородном состоянии, с периодом неоднородности $\frac{1}{k^*}$, где критическое значение волнового вектора k^*, соответствующее минимуму энергии возбуждения магнонов, определяется выражением (4.21). В этом случае при равенстве нулю энергетической щели спектра (4.17) можно определить линию потери устойчивости пространственно неоднородного состояния вблизи линии фазового перехода ферромагнитная – сверхтвердая фаза, которая с учетом формул (4.21), (4.22) имеет вид:

$$H_{IN1}^C = \beta - J_0 - \frac{\tilde{J}_0}{2} + A_0 + \frac{2\tilde{A}_0}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta - J_0 + A_0}{2\left(\tilde{J}_0 - J_0\right)}}\left(\tilde{\Omega}_0 \cos 2\psi - \Omega_0\right) \tag{4.23}$$

$$H_{IN2}^C = \beta - J_0 + \frac{\tilde{J}_0}{2} + A_0 + \frac{2\tilde{A}_0}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta - J_0 + A_0}{2\left(\tilde{J}_0 + J_0\right)}}\left(\tilde{\Omega}_0 \cos 2\psi - \Omega_0\right) \tag{4.24}$$

Очевидно, что $H_{IN1}^C < H_{IN2}^C$. Таким образом пространственно-неоднородное состояние реализуется для второй подрешетки при больших полях, в результате чего именно поле (4.24) является полем перехода в пространственно-неоднородное состояния для все системы с периодом неоднородности $\frac{1}{k_2^*}$.

Необходимо отметить, что пространственно-неоднородное состояние реализуется в рассматриваемой системе за счет проекции вектора намагниченности на ось OZ. Чем больше значение данной проекции, тем большее влияние оказывает магнитодипольное взаимодействие на свойства системы. Поэтому, вследствие конкуренции между изингоподобными обменными взаимодействиями, легкоплоскостной анизотропии и внешнего магнитного поля, увеличение последнего и приводит к росту проекции вектора намагниченности на ось OZ. Данное обстоятельство и играет главную роль в возникновении фазового перехода из пространственно-неоднородного в сверхтвердое состояние при $H > H_{IN2}^C$. Тогда, линия устойчивости (4.24) находится вблизи ферромагнитного состояния, что легко видеть из сравнения (4.11) и (4.24). Что касается вопроса о реализации сверхтвердой магнитной фазы и пространственно-неоднородного состояния вблизи линии устойчивости квадрупольной фазы, то в данной области соотношений параметров системы ситуация существенно сложнее. При малых значениях магнитного поля $H > H_{QU}^C$ решающую роль в формировании свойств играет легкоплоскостная анизотропия. Поэтому вектор намагниченности хоть и отличен от нуля, но за счет эффекта квантового сокращения спина является малым. Таким образом, хотя влияние магнитодипольного взаимодействия мало вблизи линии потери устойчивости квадрупольного состояния, пренебрегать его влиянием мы не можем.

На основе полученных результатов построим качественную фазовую диаграмму сильноанизотропной двухподрешеточной ультратонкой пленки с изингоподобным обменным взаимодействием (рис. 4.4) [208]. На диаграмме пунктирной линией обозначена линия фазового перехода второго рода между сверхтвердой фазой и ферромагнитным состоянием. Сплошные линии

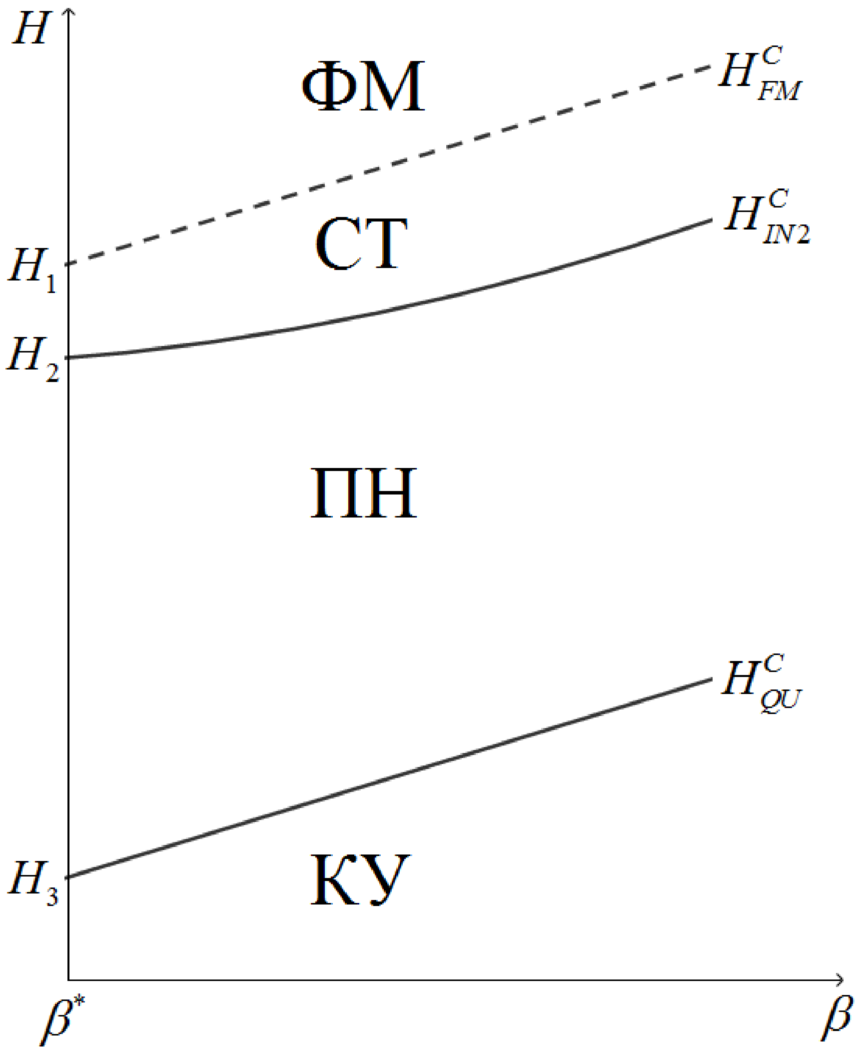

Рис. 4.4. Фазовая диаграмма исследуемой системы.

обозначают линии потери устойчивости квадрупольной фазы и пространственно-неоднородного состояния. Также на фазовой диаграмме введены следующие обозначения:

$$H_1 = J_0 + A_0 + \frac{2}{3}\tilde{A}_0;$$

$$H_2 = J_0 + A_0 + \frac{2}{3}\tilde{A}_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2J_0 - \tilde{J}_0 + 2A_0}{4\left(J_0 + \tilde{J}_0\right)}}\left(\tilde{\Omega}_0 \cos 2\psi - \Omega_0\right); \tag{4.25}$$

$$H_3 = 2J_0 - \frac{\tilde{J}_0}{2} - \frac{2}{3}A_0 + 2\tilde{A}_0.$$

Поскольку мы рассматриваем модель сильнанизотропного магнетика, в которой энергия обменного взаимодействия существенно меньше энергии легкоплоскостной одноионной анизотропии, то при слабом внешнем магнитном поле реализуется квадрупольная фаза. Однако минимальное значение, при котором реализация квадрупольной фазы вообще возможна, определяется соотношением:

$$\beta^* = 2J_0 - \frac{\tilde{J}_0}{2} \qquad (4.26)$$

В случае если константа лекгоплоскостной анизотропии меньше β^*, то квадрупольное состояние не наблюдается в системе. Но при этом может возникать антиферромагнитное или квадрупольно-антиферромагнитное состояние.

Основные результаты четвертого раздела

1. Показано, что в двумерной модели двухподрешеточного магнетика с ферромагнитным внутриподрешеточным и антиферромагнитным межподрешеточным изингоподобным обменным взаимодействием с большой одноионной анизотропией типа легкая плоскость в случае сильного внешнего магнитного поля учет магнитодипольного взаимодействия приводит к статической перенормировке спектров магнонов, а также к уменьшению области существования ферромагнитной фазы.
2. При полях, меньших значения критического поля в исследуемой системе реализуется квадрупольное фазовое состояния с нулевым значением намагниченности на узле, характеризующееся тензором квадрупольных моментов. Магнитодипольное взаимодействие также не влияет на динамические свойства системы в квадрупольной фазе, а проявляется лишь в статических перенормировках спектров и линии потери устойчивости, приводя к уменьшению области существования данной фазы.

3. В случае, когда внешнее магнитное поле принимает промежуточное значение между линиями устойчивости ферромагнитной и квадрупольной фаз, важную роль начинают играть подрешеточное и межподрешеточное обменные взаимодействия. В результате чего, антиферромагнитное упорядочение в системе приводит к тому, что магнитные моменты узлов различных подрешеток отклоняются от направления магнитного поля по-разному и подрешетки не являются эквивалентными. Следовательно, в системе реализуется так называемое сверхтвердое магнитное состояние. При этом магнитодипольное взаимодействие оказывает влияние не только на энергетический спектр магнитного иона, но и на углы ориентации магнитных моментов, усиливая влияние легкоплоскостной анизотропии.
4. В отличие от ферромагнитного и квадрупольного фазовых состояний, в сверхтвердом состоянии магнитодипольное взаимодействие проявляется как в статических перенормировках спектров магнонов, так и динамически. При определенной ориентации волнового вектора в базисной плоскости, вследствие влияния магнитодипольного взаимодействия реализуется пространственно-неоднородное состояние.
5. Впервые построена фазовая диаграмма исследуемой системы двумерного двухподрешеточного сильноанизотропного магнетика с ферромагнитным внутриподрешеточным и антиферромагнитным межподрешеточным изингоподобным обменным взаимодействием. Определены типы фазовых переходов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты и положения диссертационной работы, следующие:

1. Впервые исследован ферромагнетик с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями для произвольных соотношений между материальными параметрами. Показано, что в системе возможно существование угловой ферромагнитной фазы, с углом ориентации вектора намагниченности, определяемым соотношением между константами анизотропий. При больших значениях одноионных анизотропий в системе реализуется квадурпольное состояние с нулевым значением намагниченности на узле, описывающееся тензорным параметром порядка. Получены аналитические выражения для спектров магнонов и линий потери устойчивости каждой фазы. Показано, что фазовые переход между ферромагнитным и квадрупольным состояниями является фазовым переходом первого рода и протекает через промежуточное состояние, описывающееся как векторным, так и тензорным параметром порядка.
2. Впервые исследовано влияние механических граничных условий на свойства ферромагнетика с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями. Показано, что в системе возможна реализация как ферромагнитного, так и квадрупольного фазовых состояний. Равновесный угол ориентации вектора намагниченности в ферромагнитной фазе определяется не только соотношением между константами анизотропий, но и спонтанными деформациями. При этом влияние магнитоупругого взаимодействия на магнитную подсистему сводится лишь к статическим перенормировкам спектров квазимагнонов, приводя к возникновению аддитивной добавки в энергетической щели. Влияние магнитной подсистемы на упругую приводит к изменению скоростей звука в системе в угловой ферромагнитной фазе. В квадрупольной фазе скорости звука не перенормируются магнитоупругим взаимодействием, что связано с равенством нулю вектора намагниченности на узле.

3. Впервые показано, что фазовый переход между угловым ферромагнитным и квадрупольным фазовыми состояниями ферромагнетике с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями при учете механических граничных условий является фазовым переходом первого рода, протекающим через промежуточное квадрупольно-ферромагнитное состояние. При этом динамического проявления магнитоупругого взаимодействия не наблюдается, а закон дисперсии квазифононов остаются линейными по волновому вектору в окрестности фазового перехода. Таким образом, в точке фазового перехода квазиакустические возбуждения не размягчаются, и фазовый переход протекает по квазимагнонной ветви возбуждения. Последнее обстоятельство связано с тем, что рассматриваемый фазовый переход не является переориентационным.

4. Впервые исследованы статические и динамические свойства ультратонкой ферромагнитной пленки с конкурирующими легкоплоскостной и наклонной одноионными анизотропиями с учетом механических граничных условий. Показано, что в такой системе возможна реализация углового ферромагнитного и квадрупольного состояний. Более того, в исследуемой ультратонкой пленке существенное влияние оказывает магнитодипольное взаимодействие, учет которого приводит к усилению легкоплоскостной анизотропии. Фазовый переход между угловой ферромагнитной фазой и квадрупольной фазой является фазовым переходом первого рода и не является переориентационным. Динамическое проявление магнитодипольного взаимодействия заключается в возникновении спектре квазимагнонов линейного по волновому вектору слагаемого, в результате чего, одному значению энергии возбуждений может соответствовать различные значения волнового вектора, что свидетельствует о реализации пространственно неоднородного состояния с периодом неоднородности, значение которого существенно зависит от материальных параметров системы и от ориентации волнового вектора в базисной плоскости пленки.

5. Впервые исследована возможность существования сверхтвердой магнитной фазы в двумерной модели сильноанизотропного двухподрешеточного магнетика с фрустрированным изингоподобным обменным взаимодействием. В случае сильного внешнего магнитного поля в системе реализуется ферромагнитное состояние, а в случае слабого внешнего магнитного поля – квадрупольное состояние. Показано, что при промежуточных значениях внешнего магнитного поля между линиями устойчивости ферромагнитного и квадрупольного состояний антиферромагнитное упорядочение в системе приводит к тому, что магнитные моменты узлов различных подрешеток отклоняются от направления магнитного поля по-разному. При этом учет магнитодипольного взаимодействия приводит к возникновению пространственно-неоднородного состояния при определенной ориентации волнового вектора в базисной плоскости пленки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вонсовский С.В. Магнетизм / Сергей Васильевич Вонсовский. – М.: Издательство «Наука», 1971. – 1032 с.

2. Sellmyer D.J. Advanced Magnetic Nanostructures / David J. Sellmyer, Ralph Skomski. – Springer Science + Business Media Inc: USA, 2006. – 514 p.

3. Koon N.C. Direct Evidence for Perpendicular Spin Orientations and Enhanced Hyperfine Fields in Ultrathin Fe(100) Films on Ag(100) / N.C. Koon, B.T. Jonker, F.A. Volkening *et al.* // Physical Review Letters. – 1987. – Vol. 59. – P. 2463-2466.

4. Krebs J.J. Magnetic and structural properties of Fe(100)/Ag(100) single-crystal multilayer films with ultrathin Fe layers / J.J. Krebs, B.T. Jonker and G.A. Prinz // Journal of Applied Physics. – 1988. – Vol. 63. – P. 3467-3469.

5. Przybylski M. Mössbauer analysis of ultrathin ferromagnetic Fe(110) films on W(110) coated by Ag / M. Przybylski, I. Kaufmann, and U. Gradmann // Physical Review B. – 1989. – Vol. 40. – P. 8631-8640.

6. Pappas D.P. Reversible transition between perpendicular and in-plane magnetization in ultrathin films / D.P. Pappas, K.-P. Kämper, and H. Hopster // Physical Review Letters. – 1990. – Vol. 64. – P. 3179-3182.

7. Allenspach R. Magnetic domains in thin epitaxial Co/Au(111) films / R. Allenspach, M. Stampanoni, and A. Bischof // Physical Review Letters. – 1990. – Vol. 65. – P. 3344-3347.

8. Gay J.G. Spin Anisotropy of Ferromagnetic Films / J.G. Gay and Roy Richter // Physical Review Letters. – 1986. – Vol. 56. – P. 2728-2731.

9. Pescia D. Perpendicular versus in-plane magnetization in a 2D Heisenberg monolayer at finite temperatures / D. Pescia and V.L. Pokrovsky // Physical Review Letters. – 1990. – Vol. 65. – P. 2599-2601.

10. Bruno Patric. Spin-wave theory of two-dimensional ferromagnets in the presence of dipolar interactions and magnetocrystalline anisotropy / Patric Bruno // Physical Review B. – 1991. – Vol. 43. – P. 6015-6021.

11. Moschel A. Influence of the dipole interaction on the direction of the magnetization in thin ferromagnetic films / A. Moschel and K.P. Usadel // Physical Review B. – 1994. – Vol. 49. – P. 12868-12871.
12. Moschel A. Reorientation transitions of first and second order in thin ferromagnetic films / A. Moschel and K.D. Usadel // Physical Review B. – 1995. – Vol. 51. – P. 16111-16114.
13. Erickson R.P. Magnetic instabilities in ultrathin ferromagnets / R.P. Erickson and D.L. Mills // Physical Review B. – 1992. – Vol. 46. – P. 861-865.
14. Kashuba A. Stripe domain structures in a thin ferromagnetic film / A. Kashuba, V.L. Pokrovsky // Physical Review Letters. – 1993. – Vol. 70. – P. 3155-3158.
15. Bogdanov A.N. Magnetic anisotropy, phase transitions, and domain structures in films with out-of-plane magnetization / A.N. Bogdanov, U.K. Rößler, K.-H. Müller // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2002. – Vol. 238. – P. 155-159.
16. Иванов Б.А. Магнитоупругая стабилизация дальнего магнитного порядка в двумерных легкоплоскостных магнетиках / Б.А. Иванов, Е.В, Тартаковская // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1996. – Т. 63. – С. 792-796.
17. Mitsay Yu.N. Magnetoelastic coupling and long-range magnetic ordering in two-dimensional ferromagnets / Yu.N. Mitsay, Yu.A. Fridman, D.V. Spirin, *et al.* // Physica B. – 2002. – Vol. 292. – P. 83-88.
18. Allenspach R. Magnetization direction switching in Fe/Cu(100) epitaxial films: Temperature and thickness dependence / R. Allenspach and A. Bischof // Physical Review Letters. – 1992. – Vol. 69. – P. 3385-3388.
19. Qui Z.Q. Asymmetry of the spin reorientation transition in ultrathin Fe films and wedges grown on Ag(100) / Z.Q. Qui, J. Pearson, and S.D. Bader // Physical Review B. – 1993. – Vol. 70. – P. 1006-1009.
20. Schulz B. Crossover from in-plane to perpendicular magnetization in ultrathin Ni/Cu(001) films / B. Schulz and K. Baberschke // Physical Review B. – 1994. – Vol. 50. – P. 13467-13471.

21. O'Brien W.L. Magnetic phases of ultrathin Fe films on fcc Co(001) / W.L. O'Brien, B.P. Tonner // Surface Science. – 1995. – Vol. 334. – P. 10-18.
22. Bochi Gabriel. Perpendicular magnetic anisotropy, domains, and misfit strain in epitaxial Ni/$Cu_{1-x}Ni_x$/Cu/Si (001) thin films / Gabriel Bochi, C.A. Ballentine, H.E. Inglefield, *et. al.* // Physical Review B. – 1995. – Vol. 52. – P. 7311-7321.
23. Johnson M.T. Magnetic anisotropy in metallic multilayers / M.T. Johnson, P.J.H. Bloemen, F.J.A. den Broeder, J.J. de Vries // Reports on Progress in Physics. – 1996. – Vol. 59. – P. 1409-1458.
24. Poulopoulos P. Magnetism in thin films / P. Poulopoulos and K. Baberschke // Journal of Physics: Condensed Matter. – 1999. – Vol. 11. – P. 9495-9516.
25. Castelnovo C. Magnetic monopoles in spin ice / C. Castelnovo, R. Moessner & S.L. Sondhi // Nature. – 2008. – Vol. 451. – P. 42-45.
26. Morris D.J.P. Dirac Strings and Magnetic Monopoles in the Spin Ice $Dy_2Ti_2O_7$ / D.J.P. Morris, D.A. Tennant, S.A. Grigera *et al.* // Science. – 2009. – Vol. 326. – P. 411-414.
27. Fennell T. Magnetic Coulomb Phase in the Spin Ice $Ho_2Ti_2O_7$ / T. Fennell, P.P. Deen, A.R. Wildes *et al.* // Science. – 2009. – Vol. 326. – P. 415-417.
28. Mermin N.D. Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models / N.D. Mermin and H. Wagner // Physical Review Letters. – 1966. – Vol. 17. – P. 1133-1136.
29. Hohenberg P.C. Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions / P.C. Hohenberg // Physical Review. – 1967. – Vol. 158. – P. 383-386.
30. Balents L. Spin liquids in frustrated magnets / L. Balents // Nature. – 2010. – Vol. 464. – P. 199-208.
31. Peters D. Spin-one Heisenberg antiferromagnetic chain with exchange and single-ion anisotropies / D. Peters, I.P. McCulloch, W. Selke // Physical Review B. – 2009. – Vol. 79. – P. 132406-132409.
32. Romhányi J. Supersolid phase and magnetization plateaus observed in the anisotropic spin-3/2 Heisenberg model on bipartite lattices / Judit Romhányi, Frank

Pollmann, and Karlo Penc // Physical Review B. – 2011. – Vol. 84. – P. 184427-184440.

33. Farle M. Higher-order magnetic anisotropies and the nature of the spin-reorientation transition in face-centered-tetragonal Ni(001)/Cu(001) / M. Farle, B. Mirwald-Schulz, A.N. Anisimov *et al.* // Physical Review B. – 1997. – Vol. 55. – P. 3708-3715.

34. O'Dell T.H. Ferromagnetodynamics: The Dynamics of Magnetic Bubbles, Domains and Domain Walls / Thomas Henry O'Dell. – Willey, 1981. – 230 p.

35. Gyorgy E.M. General conditions for growth-induced anisotropy in garnets / E.M. Gyorgy, A. Rosencwaig, E.I. Blount *et al.* // Applied Physics Letters. – 1971. – Vol. 18. – P. 479-480.

36. Бутрим В.И. Анизотропия и фазовые состояния феррит-гранатовых пленок с разориентированными поверхностями / В.И. Бутрим, С.В. Дубинко, Ю.Н. Мицай // Физика Твердого Тела. – 2003. – Т. 45. – С. 1052-1055.

37. Прокопов А.Р. Особенности магнитоиндуцированного спин-переориентационного перехода в феррит-гранатовых пленках с анизотропией «угловая фаза» / А.Р. Прокопов, С.В. Дубинко, А.О. Хребтов и др. // Физика Твердого Тела. – 1997. – Т. 39. – С. 1415-1420.

38. Арифов Л.Я. Фазовые состояния и спектры связанных магнитоупругих волн ферромагнетика с наклонной анизотропией / Л.Я. Арифов, Ю.А. Фридман, В.И. Бутрим и др. // Физика Низких Температур. – 2001. – Т. 27. – С. 860-864.

39. Schedin F. In-plane magnetization of an ultrathin film of $Fe_3O_4(111)$ grown epitaxially on Pt(111) / F. Schedin, L. Hewitt, P. Morrall *et al.* // Physical Review B. – 1998. – Vol. 58. – P. R11861-R11863.

40. Рандошкин В.В. О преимуществах безгистерезисных магнитооптических пленок при использовании в неразрушающей дефектоскопии / В.В. Рандошкин, М.Ю. Гусев, Ю.Ф. Козлов и др. // Журнал Технической Физики. – 2000. – Т. 70. – С. 118-124.

41. Donahue M.J. Complementary imaging of granular Co-Ag films with magneto-optical indicator film technique and magnetic force microscopy / M.J. Donahue, L.H.

Bennet, R.D. McMichael *et al.* // Journal of Applied Physics. – 1996. – Vol. 79. – P. 5315-53-17.

42. Dennis C.L. The defining length scales of mesomagnetism: a review / C.L. Dennis, R.P. Borges, L.D. Buda *et al.* // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2002. – Vol. 14. – P. R1175-R1262.

43. Shaw J.M. Origins of switching field distributions in perpendicular magnetic nanodot arrays / Justin M. Shaw, W.H. Rippard, S.E. Russek *et al.* // Journal of Applied Physics. – 2007. – Vol. 101. – P. 023909-023909-4.

44. Hellwig O. Separating dipolar broadening from the intrinsic switching field distribution in perpendicular patterned media / O. Hellwig, A. Berger, T. Thomson *et al.* // Applied Physics Letters. – 2007. – Vol. 90. – P. 162516-162516-3.

45. Bunce C. Laser-induced magnetization switching in films with perpendicular anisotropy: A comparison between measurements and a multi-macrospin model / C. Bunce, J. Wu, G. Ju *et al.* // Physical Review B. – 2010. – Vol. 81. – P. 174428-114435.

46. Островский В.С. Особенности статики и динамики магнитных диэлектриков с одноионной анизотропией (Обзор) / В.С. Островский, В.М. Локтев // Физика Низких Температур. – 1994. – Т. 20. – С. 983-1016.

47. Переверзев Ю.В. О Фазовой диаграмме легкоплоскостного Ферромагнетика в продольном магнитном поле / Ю.В. Переверзев, В.Г. Борисенко // Физика Твердого Тела. – 1984. – Т. 26. – С. 1249-1252.

48. Борисенко В.Г. Квантовые особенности фазовых диаграмм легкоплоскостных антиферромагнетиков в магнитном поле / В.Г. Борисенко, Ю.В. Переверзев // Физика Низких Температур. – 1985. – Т. 11. – С. 730-735.

49. Онуфриева Ф.П. Низкотемпературные свойства спиновых систем с тензорным параметром порядка / Ф.П. Онуфриева // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1985. – Т. 89. – С. 2270-2287.

50. Островский В.С. Спиновая конфигурация и магнонный спектр сильноанизотропного антиферромагнетика / В.С. Островский // Физика Твердого Тела. – 1976. – Т. 18, № 4. – С. 1041-1046.

51. Островский В.С. К теории коллективных возбуждений в слабом ферромагнетике в поперечном поле / В.М. Локтев, В.С. Островский // Физика Твердого Тела. – 1979. – Т. 21, № 12. – С. 3559-3566.

52. Локтев В.М. К теории статических и резонансных свойств антиферромагнетиков типа «легкая плоскость» со спином 3/2 в поперечном магнитном поле / В.М. Локтев // Физика Низких Температур. – 1981. – Т. **7**. – С. 1184-1195.

53. Калита В.М. Особенности намагничивания антиферромагнетика с одноионной анизотропией типа «легкая плоскость» и со спинами ионов S = 1 / В.И. Калита, И.М. Иванова, В.М. Локтев // Физика Низких Температур. – 2002. – Т. 28. – С. 667-670.

54. Калита В.М. К теории магнитных фазовых переходов в магнетиках с большой одноионной анизотропией / В.М. Калита, В.М. Локтев // Физика Низких Температур. – 2002. – Т. 28. – С. 1244-1250.

55. Калита В.М. Квантовые фазовые переходы и фазовая *H-T* диаграмма ван-флековского многоподрешеточного антиферромагнетика / В.М. Калита, В.М. Локтев // Физика Низких Температур. – 2006. – Т. 32. – С. 158-168.

56. Калита В.М. О магнитных фазовых переходах типа смещения при спиновом упорядочении в магнетиках с сильной одноионной анизотропией / В.М. Калита, В.М. Локтев // Физика Твердого Тела. – 2003. – Т. 45. – С. 1450-1455.

57. Калита В.М. Температурные магнитные фазовые переходы при конкуренции одно- и межионной магнитных анизотропий / В.М. Калита, В.М. Локтев // Физика Твердого Тела. – 2005. – Т. 47. – С. 666-672.

58. Fridman Y.A. “Supersolid” phase in spin-1 easy-plane antiferromagnetic / Y.A. Fridman, O.A. Kosmachev, and P.N. Klevets // The European Physical Journal B. – 2011. – Vol. 81. – P. 185-196.

59. Калита В.М. Многоподрешеточная магнитная фаза, индуцированная внешним полем в синглетном магнетике / В.М. Калита, В.М. Локтев // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 2004. – Т. 125. – С. 1149-1158.

60. Ivanova I.M. Quantum phase transition: Van Vleck antiferromagnet in a magnetic field / I.M. Ivanova, V.M. Kalita, V.O. Pashkov *et al.* // Condensed Matter Physics. – 2008. – Vol. 11. – P. 509-522.
61. Островский В.С. О нелинейной динамике сильноанизотропных магнетиков со спинами S=1 / В.С. Островский // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1986. – Т. 91. – С. 1690-1701.
62. Калита В.М. Квантовые эффекты при намагничивании легкоосного ферромагнетика с S=1 / В.М. Калита, И.М. Иванова, В.М. Локтев // Теоретическая и Математическая Физика. – 2012. – Т. 173. – С. 333-352.
63. Нагаев Э.Л. Аномальные магнитные структуры и фазовые переходы в негейзенберговских магнетиках / Э.Л. Нагаев // Успехи Физических Наук. – 1982. – Т. 136. – С. 61-103.
64. Нагаев Э.Л. Магнетики со сложным обменным взаимодействием / Э.Л. Нагаев. – М.: Изд-во «Наука», 1988. – 232 с.
65. Tsuneto T. Spin ordering in a system with large anisotropy energy in a magnetic field / T. Tsuneto, T. Murao // Physica. – 1971. – Vol. 51. – P. 186-196.
66. Frohlich J., Simon B. and Spenser T. Infrared Bounds, Phase Transitions and Continuous Symmetry Breaking // Commun. Math. Phys. – 1976. – Vol. 50. – P. 79-96.
67. Dyson F. J. Phase Transitions in Quantum Spin Systems with Isotropic and Nonisotropic Interaction / F.J. Dyson, E.H. Lieb and B. Simon // Journal of Statistical Physics. – 1978 . – Vol.18, № 14. – P. 335-383.
68. Bloch F. Zur Theorie des Ferromagnetismus / F. Bloch // Zeitschrift für Physik. – 1930. – Vol. 61. № 3. – P. 206-213.
69. Белавин А.А. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика / А.А. Белавин, А.М. Поляков // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1975. – Т. 22, № 10. – С. 503-506.

70. Ivanov B.A. Normal modes and soliton resonance for vortices in 2D classical antiferromagnets / B.A. Ivanov, A.K. Kolezhuk and G.M. Wysin // Physical Review Letters. – 1996. – V. 76, № 3. – P. 511-514.
71. Иванов Б.А. Квантовое туннелированные в магнитном вихре двумерного легкоплоскостного ферромагнетика / Е.Г. Галкина, Б.А. Иванов // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1995. – Т. 61, № 6. – С. 495-498.
72. Иванов Б.А. Квантовое туннелированные и квантовая когерентность в топологическом солитоне квазидвумерного антиферромагнетика / Б.А. Иванов, А.К. Колежук // Физика Низких Температур. – 1995. – Т. 21, № 9. – С. 986-988.
73. Иванов Б.А. Локальные моды и рассеяние спиновых волн на солитоне в двумерном изотропном ферромагнетике / Б.А. Иванов // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1995. – Т. 61, № 11. – С. 898-902.
74. Березинский В.Л. Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии 1. Классические системы. / В.Л. Березинский // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1971. – Т. 59, № 3. – С. 907-920.
75. Kosterlitz J.M. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems / J.M. Kosterlitz, D.J. Thouпless // Journal of Physics C. – 1973. – V. 6, № 7. – P. 1181-1203.
76. Хохлачев С.Б. Двухмерная модель Гейзенберга со слабой анизотропией / С.Б. Хохлачев // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1976. – Т. 70, № 1. – С. 265-272.
77. Bander M. Ferromagnetism of ultrathin films / M. Bander and D.L. Mills // Physical Review B. – 1988. – Vol. 38, № 16. – P. 12015-12018.
78. Tartakovskaya E.V. Spin-phonon interaction in thin magnetic films / E.V. Tartakovskaya, B.A. Ivanov // Physica B. – 1999. – Vol. 263-264. – P. 769-771.
79. Иванов Б.А. Магнитоупругая стабилизация дальнего магнитного порядка в двумерных легкоплоскостных магнетиках / Б.А. Иванов, Е.В, Тартаковская //

Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1996. – Т. 63. – С. 792-796.

80. Крупичка С. Физика ферритов и родственных им окислов. Т.2. – М.: Мир, 1976. – 504 с.

81. Кузьмин Е.В., Петраковский Г.А., Завадский Э.А. Физика магнитоупорядоченных веществ. – Новосибирск: Наука, 1976. – 287 с.

82. Белов К.П. Редкоземельные магнетики и их применение. – М.: Наука, 1980. – 239 с.

83. Ахиезер А.И. Магнон - фононное взаимодействие и магнитоакустический резонанс // Тез. докл. конф. по физике магнитных явлений. – М.: Из-во АН СССР, 1956. – С. 27-29.

84. Туров Е.А. О спектре колебаний ферромагнитной упругой среды / Е.А. Туров, Ю.П. Ирхин // Физика Магнитных Материалов. – 1956. – Т. 3, № 1. – С. 15-17.

85. Ахиезер А.И. Связанные магнитоупругие волны в ферромагнетиках и ферроакустический резонанс / А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1958. – Т. 35, № 1. – С. 228-239.

86. Kittel C. Interaction of Spin Waves and Ultrasonic Waves in Ferromagnetic Crystal / C Kittel // Physical Review – 1958. – V. 110, № 4. – P. 836-841.

87. Туров Е.А. Об энергетической щели для спиновых волн в ферро- и антиферромагнетиках, связанной с магнитоупругой энергией / Е.А. Туров, В.Г. Шавров // Физика Твердого Тела. – 1965. – Т. 7, № 1. – С. 217-226.

88. Барьяхтар В.Г.. О магнитоупругой щели в спектре спиновых волн / В.Г. Барьяхтар, Д.А. Яблонский // Физика Магнитных Материлов. – 1977. – Т. 43, № 3. – С. 645-646.

89. Коренблит И.Я. Особенности спектра магнитоупругих колебаний в ферромагнетиках с большой магнитострикцией / И.Я. Корнеблит // Физика Твердого Тела. – 1966. – Т. 8, № 9. – С. 2579 – 2586.

90. Дикштейн И.Е. Параметрическое возбуждение звука в ферро-, ферри- и антиферромагнетиках в окрестности точек фазовых переходов / И.Е. Дикштейн, В.В. Тарасенко // Физика Твердого Тела. – 1978. – Т. 20, № 10. – С. 2942-2948.
91. Дикштейн И.Е. Магнитоупругие волны в ортоферритах / И.Е. Дикштейн, В.В. Тарасенко, В.Г. Шавров // Физика Твердого Тела. – 1977. – Т. 19, № 4. – С. 1107- 1113.
92. Iensen J. Field dependence of the elastic constant C_{66} in the basal-plane ferromagnet terbium / J. Iensen, S.B. Palmer // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1979. – V. 12. – P. 4573-4583.
93. Туров Е.А. Нарушенная симметрия и магнитоакустические эффекты в ферро- и антиферромагнетиках / Е.А. Туров, В.Г. Шавров // Успехи Физических Наук. – 1983. – Т. 140. – С. 429-462.
94. Щеглов В.И. Зависимость скорости звука от магнитного поля в ферро- и антиферромагнетиках / В.И. Щеглов // Физика Твердого Тела. – 1972. – Т.14. – С. 2180 – 2181.
95. Seavy M.N. Acoustic resonance in the ease – plane weak ferromagnets α – FeO_3 and $FeBO_3$ / M.N. Seavy // Solid State Communications. – 1972. – V. 10. – P. 219-225.
96. Ozhogin V.I. Magnetoelastic renormation of sound velocity / V.I. Ozhogin, P.P. Maksimenkov // Digests of INTERMAG Conference. – Kyoto, 1972. – P. 471-482.
97. Евтихеев Н.Н. Магнитоупругая перенормировка скорости звука в гематите / Н.Н. Евтихеев, С.А. Погожев, В.П. Преображенский, Н.А. Экономов // Вопросы радиоэлектроники. – 1981. – Т. 5. – С. 87-89.
98. Belov K.P. Magnetostriction of rare-earth ferrite garnets at low temperatures / K.P. Belov and V.I. Sokolov // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1965. – Vol. 48. – P. 652-653.
99. Терѐшина И.С. Магнитострикция и намагниченность интерметаллических соединений $RFe_{2-x}Co_x$ (R=Tb, Dy, Er) со скомпенсированной магнитной анизотропией / И.С. Терѐшина, С.А. Никитин, Г.А. Политова и др. // Физика Твердого Тела. – 2009. – Т. 51. – С. 85-90.

100. Никитин С.А. Спин-переориентационные переходы и доменная структура в монокристаллах соединений $TbFe_{11-x}Co_xTi$ / С.А. Никитин, Т.И. Иванова, Н.Ю. Панкратов и др. // Физика Твердого Тела. – 2005. – Т. 47. – С. 501-505.

101. Ахиезер А И. Спиновые волны / Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. – М.: Наука, 1967. – 368 с.

102. Вальков В.В. Операторы Хаббарда и спин-волновая теория гейзенберговских магнетиков с произвольным спином / В.В. Вальков, С.Г. Овчинников // Теоретическая и Математическая Физика. – 1982. – Т.50. – С. 466-476.

103. Barnett R. Classifying novel phases of spinor atoms / R. Barnett, A. Turner and E. Demler // Physical Review Letters. – 2006. – Vol. 97. – 180412.

104. Fridman Yu.A. Spin nematic and antinematic states in a spin-3/2 isotropic non-Heisenberg magnet / Yu.A. Fridman, O.A. Kosmachev, A.K. Kolezhuk, B.A. Ivanov // Physical Review Letters. – 2011 – Vol. 106. – 097202.

105. Фридман Ю.А. Квантовые эффекты в анизотропном ферримагнетике / Ю.А. Фридман, О.А. Космачев // Физика Твердого Тела. – 2009. – Т. 51. – С. 1104-1107.

106. Вітебський І.М. Теория магнітопружних хвиль в сильно анізотропному легкоплоскістному феромагнетику, враховуюча обертальну інвариіантністю / І.М. Вітебський, Н.М. Лавриненко, А.М. Майорова та інш. // Український Фізичний Журнал. – 1994. – Т. 39, № 5 – С. 597-603.

107. Витебский И.М. Вращательно-инвариантная теория магнитоупругих волн в сильно анизотропном легкоплоскостном ферромагнетике / И.М. Витебский, Н.М. Лавриненко, А.Н. Майорова, Ю.Н. Мицай, Ю.А. Фридман // Препринт Института монокристаллов АН Украины. – ИМК-93-8. – Харьков. – 1993. – 22 с.

108. Bar’yakthar V.G. Critical dynamics at ferroelastic phase transitions in an external field / V.G.Bar’yakthar, I.M.Vitebskii, N.M.Lavrinenko etc. // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1986. – Vol. 90. – P. 1111-1117.

109. Малеев С.В. Дипольные силы в двумерных и слоистых ферромагнетиках / С.В. Малеев // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1976. – Т. 70. – С. 2374-2380.
110. O'Dell T.H. Ferromagnetodynamics: The Dynamics of Magnetic Bubbles, Domains and Domain Walls / Thomas Henry O'Dell. – Willey, 1981. – 230 p.
111. Барьяхтар В.Г. О фазовой диаграмме ферромагнитной пластинки во внешнем магнитном поле / В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1977. – Т. 72, № 4. – С. 1504-1516.
112. Fridman Yu.A. Influence of magnetic dipole and magnetoelastic interactions on the phase states of 2D non-Heisenberg ferromagnetic with complex exchange interactions / Yu.A. Fridman, D.A. Matunin, Ph.N. Klevets and O.A. Kosmachev // Journal of Magnetism and Magnetic Materials . – 2009. – Vol. 321. – P. 3782-3794.
113. Antos R. Magnetic Vortex Dynamics / R. Antos, Y. Otani and J. Shibata // Journal of the Physical Society of Japan. – 2008. – Vol. 77 – P. 031004.
114. Ivanov B.A. Normal modes and soliton resonance for vortices in 2D classical antiferromagnets / B.A. Ivanov, A.K. Kolezhuk, G.M.Wysin // Physical Review Letters. – 1996. – Vol. 76, № 3. – P. 511-514.
115. Galkina E.G. Magnetic vortex as a ground state for micron-scale antiferromagnetic samples / E.G. Galkina, A.Yu. Galkin, B.A. Ivanov and Franco Nori // Physical Review B. – 2010. – Vol. 81, P. 184413-184433.
116. Pich C. Neel temperature for quasi-two-dimensional dipolar antiferromagnets / C. Pich, F. Schwabl // Physical Review B. – 1994. – Vol. 49, № 1. – P. 413-416.
117. Kashuba A. Exact scaling of spin-wave correlations in the 2D XY ferromagnet with dipolar forces / A. Kashuba // Physical Review Letters. – 1994. – Vol. 73. – P. 1133.
118. Fridman Yu.A. Stabilization of the long-range magnetic ordering by dipolar and magnetoelastic interactions I two-dimensional ferromagnets / Yu.A. Fridman, D.V. Spirin, C.N. Alexeyev, and D.A. Matiunin // European Physical Journal B. – 2002. – Vol. 26. – P. 185-190.

119. Fruchart O. Magnetism in reduced dimensions / Olivier Fruchart, André Thiaville // Comptes Rendus – Physique. – 2005. – Vol. 6. – P. 921-933.

120. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. В 10 томах [Т. VIII. Электродинамика сплошных сред.] / Лев Давидович Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Изд-во «Наука», 1982. – 620 с.

121. Ozhogin V.I. Critical Fields and Resonance in an Easy-axis Antiferromagnet with Dzyaloshinskii Interaction / V.I. Ozhogin, V.G. Shapiro // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1968. – Vol. 27. – P. 54-60.

122. Ozhogin V. I. New Type of Antiferromagnetic Resonance in α-Fe_2O_3 / V.I. Ozhogin, V.G. Shapiro // Letters to Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1967. – Vol. 6. – P. 7-9.

123. Jensen P.J. Direction of the magnetization of thin films and sandwiches as a function of temperature / P.J. Jensen and K.H. Bennemann // Physical Review B. – 1990. – Vol. 42. – P. 849-855

124. Hu X. Mean-field theory for spin-reorientation phase transitions in magnetic thin films / Xiao Hu and Kawazoe Yoshiyuki // Physical Review B. – 1995. – Vol. 51. – P. 311-315.

125. Millev Y. Reorientation transitions in ultrathin ferromagnetic films by thickness- and temperature-driven anisotropy flows / Yonko Millev and Jürgen Kirschner // Physical Review B. – 1996. – Vol. 54. – P. 4137-4145.

126. Тикадзуми С. Физика Ферромагнетизма. Магнитные характеристики и практические применения / С. Тикадзуми. – М.: Мир, 1987. – 416 с.

127. Capel H.W. On the possibility of first-order phase transitions in Ising systems of triplet ions with zero-field splitting / H.W. Capel // Physica. – 1966. – Vol. 32. – P. 966-988.

128. Blume M. Ising Model for the λ Transition and Phase Separation in He^3-He^4 Mixtures / M. Blume, V.J. Emery, Robert B. Griffiths // Physical Review A. – 1971. – Vol. 4. – P. 1071-1077.

129. Cieplak M. Spin-wave theory of the paramagnetic phase boundary in transversally anisotropic antiferromagnets / M. Cieplak // Physical Review B. – 1997. – Vol. 15. – P. 5310-5316.
130. Figueiredo W. Paramagnetic phase boundary of anisotropic antiferromagnets at low temperatures. Applications to $NiCl_2{\cdot}6H_2O$, $NiCl_2{\cdot}4H_2O$ and $CoCl_2{\cdot}6H_2O$ / W. Figueiredo, S.R. Salinas // Physica B+C. – 1984. – Vol. 124. – P. 259-271.
131. Ma Y. Phase diagram of the anisotropic XY model / Yu-qiang Ma, W. Figueiredo // Physical Review B. – 1997. – Vol. 55. – P. 5604-5607.
132. Kim E. Probable observation of a supersolid helium phase / E. Kim and M.H.W. Chan // Nature. – 2004. – Vol. 427. – P. 225-227.
133. Kim D.Y. Absence of Supersolidity in Solid Helium in Porous Vycor Glass / Duk Y. Kim and Moses H.W. Chan // Physical Review Letters. – 2012. – Vol. 109. – P. 155301-155305.
134. Vengalattore M. Periodic spin textures in a degenerate F=1 ^{87}Rb spinor Bose gas / M. Vengalattore, J. Guzman, S.R. Leslie, F. Serwane, D.M. Stamper-Kurn // Physical Review A. – 2010. – Vol. 81. – P. 053612-053618.
135. Matsuda H. Off-Diagonal Long-Range Order in Solids / H. Matsuda, T. Tsuneto // Progress of of Theoretical Physics. – 1970. – Vol. 46, № 1. – P. 411-436.
136. Murakami Y. Supersolid states in a spin system: Phase diagram and collective excitations / Yuta Murakami, Takashi Oka, and Hideo Aoki // Physical Review B. – 2013. – Vol. 88. – P. 224404-224415.
137. Ye J. Quantum phases, supersolids and quantum phase transitions of interacting bosons in frustrated lattices / J. Ye, Y.
// Nuclear Physics B. – 2013. – Vol. 869. – P. 242-281.
138. Rossini D. Spin-supersolid phase in Heisenberg chains: A characterization via matrix product states with periodic boundary conditions / D. Rossini, V. Giovannetti, R. Fazio // Physical Review B. – 2011. – Vol. 83. – 140411(R).
139. Giamarchi T. Bose–Einstein condensation in magnetic insulators / T. Giamarchi, C. Rűegg, O. Tchernyshyov // Nature Physics. – 2008. – Vol. 4. – P. 198-204.

140. Nikuni T. Bose-Einstein Condensation of Dilute Magnons in TlCuCB / T. Nikuni, M. Oshikawa, A. Oosawa, H. Tanaka // Physical Review Letters. – 2000. – Vol. 84. – P. 5868-5871.

141. Misguich G. Bose-Einstein Condensation of Magnons in TlCuCl3: Phase diagram and specific heat from a self-consistent Hartee-Fock calculation with a realistic dispersion relation / G. Misguich, M. Oshikawa // Journal of the Physical Society of Japan. – 2004. – Vol. 73. – P. 3429-3435.

142. Ng K.-K. Supersolid Phase in Spin Dimer XXZ Systems under a Magnetic Field / Kwai-Kong Ng and T.K. Lee // Physical Review Letters. – 2006. – Vol. 97. – P. 127204-127207.

143. Sengupta P. Field-Induced Supersolid Phase in Spin-One Heisenberg Models / P. Sengupta and C.D. Batista // Physical Review Letters. – 2007. – Vol. 98. – P. 227201-227204.

144. Laflorencie N. Quantum and thermal transitions out of the supersolid phase of a 2D quantum antiferromagnet / Nicolas Laflorencie, Frederic Mila // Physical Review Letters. – 2007. – Vol. 99. – P. 027202-027205.

145. Picon J.-D. Mechanisms for spin supersolidity in S=1/2 spin-dimer antiferromagnets // J.-D. Picon, A.F. Albuquerque, K.P. Schmidt *et al*. // Physical Review B. – 2008. – Vol. 78. – P. 184418-184428.

146. Chen P. Field-induced spin supersolidity in frustrated S=1/2 spin-dimer models / Pochung Chen, Chen-Yen Lai, and Min-Fong Yang // Physical Review B. – 2010. – Vol. 81. – P. 020409(R)-020412(R).

147. Albuquerque A.F. Phase separation versus supersolid behavior in frustrated antiferromagnets / A. Fabricio Albuquerque, Nicolas Laflorencie, Jean-David Picon *et al.* // Physical Review B. – 2011. – Vol. 83. – P. 174421-174427.

148. Schmidt K.P. Supersolid phase induced by correlated hopping in spin-1/2 frustrated quantum magnets / K.P. Schmidt, J. Dorier, A.M. Läuchli, F. Mila // Physical Review Letters. – 2008. – Vol. 100. – 090401.

149. Yamamoto D. Magnon supersolid and anomalous hysteresis in spin dimers on a triangular lattice / D. Yamamoto, I. Danshita // Physical Review B. – 2013. – Vol. 88. P. 014419-014424.
150. Holtschneider M. Biconical structures in two-dimensional anisotropic Heisenberg antiferromagnets / M. Holtschneider and W. Selke // Physical Review B. – 2007. – Vol. 76. – P. 220405(R)-220408(R).
151. Renard J.P. Quantum energy gap in two quasi-one-dimensional S=1 Heisenberg antiferromagnets (invited) / J.P. Renard, M. Verdaguer, L.P. Regnault, W.A.C. Erkelens, J. Rossat-Mignod, J. Ribas, W.G. Stirling, C. Vettier // Journal of Applied Physics. – 1988. – Vol. 63. – P. 3538-3543.
152. Orendáč M. Thermodynamic and magnetic properties of the S=1 Heisenberg chain $Ni(C_2H_8N_2)_2Ni(CN)_4$: Experiments and theory / M. Orendáč, A. Orendáčová, J. Černák, A. Feher, P.J.C. Signore, M.W. Meisel, S. Merah, M. Verdaguer // Physical Review B. – 1995. – Vol. 52. – P. 3435-3441.
153. Tanaka Y. Field-Induced Two-Step Phase Transitions in the Singlet Ground State Triangular Antiferromagnet $CsFeBr_3$ / Y. Tanaka, H. Tanaka, T. Ono, A. Oosawa, K. Morishita, K. Iio, T. Kato, H.A. Katori, M.I. Bartashevich, T. Goto // Journal of the Physical Society of Japan. – 2001. – Vol. 70. – P. 3068-3075.
154. Dorner B. Magnetic excitations in the quasi one-dimensional antiferromagnetic singlet groundstate system $CsFeBr_3$ / B. Dorner, D. Visser, U. Steigenberger, K. Kakurai, M. Steiner // Zeitschrift für Physik B Condensed Matter. – 1988. – Vol. 72. – P. 487-496.
155. Harrison A. A dynamical correlated effective-field treatment of the magnetic excitations in the singlet ground state antiferromagnet $RbFeBr_3$ / A. Harrison, D. Visser // Journal of Physics: Condensed Matter. – 1992. – Vol. 4. – P. 6977- 6993.
156. Steiner M. Collective excitations in the 1-D-ferromagnet $CsFeCl_3$ with singlet ground state / M. Steiner, K. Kakurai, W. Knop, B. Dorner, R. Pynn, U. Happek, P. Day, G. McLeen // Solid State Communication. – 1981. – Vol. 38. – P. 1179-1184.

157. Ueltschi D. Ferromagnetism, antiferromagnetism, and the curious nematic phase of S=1 quantum spin systems / D. Ueltschi // Physical Review E. – 2015. – Vol. 91. – 042132.

158. Ueltschi D. Random loop representations for quantum spin systems / D. Ueltschi // Journal of Mathematical Physics. – 2013. – Vol. 54. , P. 083301-083342.

159. Romhányi J. Supersolid phase and magnetization plateaus observed in the anisotropic spin-32 heisenberg model on bipartite lattices / J. Romhányi, F. Pollmann, K. Penc. // Physical Review B. – 2011. – Vol. 84. – P. 184427-184429.

160. Matsuda K. Theory of magnetoelectric resonance in two-dimentional S=3/2 antiferromagnet Ba2CoGeO7 via spin-dependent metal-ligand hybridization mechanism / K. Matsuda, N. Furukawa // Journal of the Physical Society of Japan. – 2011. – Vol. 80. – 073708.

161. Seabra L. Competition between supersolid phases and magnetization plateaus in the frustrated easy-axis antiferromagnet on a triangular lattice / Luis Seabra and Nic Shannon // Physical Review B. – 2011. – Vol. 83. – P. 134412-134435.

162. Fridman Yu. A. Phase transitions in S=1 antiferromagnet with Ising-like exchange interaction and strong easy-plane single-ion anisotropy / Ph.N. Klevets, O.A. Kosmachev, Yu.A. Fridman // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2013. – Vol. 330. – P. 91-95.

163. Fridman Yu. A. Supersolid magnetic phase realization in strongly anisotropic easy-plane antiferromagnet with Ising-like exchange interaction in the transverse magnetic field / Ph.N. Klevets, O.A. Kosmachev, Yu.A. Fridman // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2013. – Vol. 348. – P. 68-74.

164. Иванов Б.А. Мезоскопические антиферромагнетики: статика,динамика, квантовое туннелирование (Обзор) / Б.А. Иванов // Физика Низких Температур. – 2005. – Т. 31. – С. 841-884.

165. Jaksch D. Fast Quantum Gates for Neutral Atoms / D. Jaksch, J.I. Cirac, P. Zoller, S.L. Rolston, R. Čoté, M.D. Lukin // Physical Review Letters. – 2000. – Vol. 85. – 2208.

166. DeMille D. Quantum Computation with Trapped Polar Molecules / D. DeMille // Physical Review Letters. – 2002. – Vol. 88. – 067901.
167. Micheli A. A toolbox for lattice-spin models with polar molecules / A. Micheli, G.K. Brennen, P. Zoller // Nature Physics. – 2006. – Vol. 2. – P. 341-347.
168. Eto Yujiro Observation of Dipole-Induced Spin Texture in an 87Rb Bose-Einstein Condensate / Yujiro Eto, Hiroki Saito and Takuya Hirano // Physical Review Letters. – 2014. – Vol. 112. – 185301.
169. Nelson D.R. Momentum- shell recursion relations, anisotropic spin, and liquid crystals in 2+ε dimensions / D.R. Nelson, R.A. Pelkovits // Physical Review B. – 1997. – Vol. 16, № 5. – P. 2191-2199.
170. Landau D.P. Phase diagrams and critical behavior of a two-dimensional anisotropic Heisenberg antiferromagnet / D.P. Landau, K. Binder // Physical Review B. – 1981. – Vol. 24, № 3. – P. 1391-1403.
171. Niemeyer Th. theory for 2-dimensional Ising spin systems/ Th. Niemeyer, J. Van Leeuwen, M.J. Wilson // Physica B. – 1974. – Vol. 71, – P. 17-40.
172. Nicoll J.F. Isotropic compressible ferromagnets / J.F. Nicoll // Physical Review B. – 1981. – Vol. 24, № 1. – P. 388-398.
173. Rudnick J. Equations of state and renormalization-group relations / J. Rudnick, D.R. Nelson // Physical Review B. – 1976. – Vol. 13, № 5. – P.2208-2221.
174. Brezin E. Spontaneous breakdown of continious symmetries near two dimensions/ E Brezin, J. Zinn-Justin // Physical Review B. – 1976. – Vol. 14, № 7. – P. 3110-3120.
175. Зайцев Р.О. Обобщенная диаграммная техника и спиновые волны в анизотропном ферромагнетике / Р.О. Зайцев // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1975. – Т. 68 – С. 207-215.
176. Вальков В.В. Квантовая спин-волновая теория ферромагнетиков с произвольным видом одноионной анизотропии / В.В. Вальков, Т.А. Валькова, С.Г. Овчинников // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1985. – Т. 88. – С. 550-561.

177. Мицай Ю.Н. Применение операторов Хаббарда в теории магнитоупругих волн / Ю.Н. Мицай, Ю.А. Фридман // Теоретическая и Математическая Физика. – 1989. – Т. 81. – С. 263-270.
178. Мицай Ю.Н., Фридман Ю.А. Операторы Хаббарда в теории магнитоупругих волн при произвольных температурах. – К., 1989. – 37 с. (Препр. / АН Украины. Ин-т металлофизики; 45-89).
179. Онуфриева Ф.П. Квантовая теория ферромагнетиков с одноионной анизотропией в магнитном поле произвольного направления / Ф.П. Онуфриева // Физика Твердого Тела. – 1981. – Т.23, №9.-С.2664 – 2673.
180. Онуфриева Ф.П. Точное решение одноионной задачи для магнетика с одноионной анизторопией в поле произвольного направления / Ф.П. Онуфриева // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1981. – Т.80, №6. – С.2372 – 2379.
181. Вальков В.В. Квантовая теория анизотропных двух-подрешеточных гейзенберговских магнетиков / Вальков В.В., Кузьмин Е.В. – Красноярск, 1984. – 28 с. – (Препринт / ИФ СО АН СССР; № 278Ф).
182. Вальков В.В. К квантовой теории анизотропных гейзенберговских магнетиков / Вальков В.В. – Красноярск, 1984. – 36 с. – (Препринт / ИФ СО АН СССР; № 277Ф).
183. Вальков В.В., Овчинников С.Г. Квазичастицы в сильно коррелированных системах. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. – 277с.
184. Барьяхтар В.Г. Функции Грина в теории магнетизма / Барьяхтар В.Г. , Криворучко В.Н., Яблонский Д.А. – К.: Наукова думка, 1984. – 336 с.
185. Fridman Yu.A. Spin waves in two-dimensional ferromagnet with large easy-plane anisotropy / Yu.A. Fridman, D.V. Spirin // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2002. – Vol. 253. – P. 111-117.
186. Вальков В.В. Применение индефинитной метрики при переходе от атомного к бозевскому (бозевско-фермиевскому) представлению квантовых гамильтонианов / Вальков В.В., Валькова Т.А. – Красноярск, 1990. – 46 с. – (Препринт / ИФ СО АН СССР, № 644Ф).

187. Вальков В.В. Применение индефинитной метрики для бозанизации SU(3) – гамильтонианов и квантовая теория спиновых нематиков / Вальков В.В., Валькова Т.А. // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1991. – Т. 99. – С. 1881-1897.
188. Сагдаткиреева М.Б. Характер наклонной анизотропии в напыленных в вакууме квантовых ямах / М.Б. Сагдаткиреева, В.В. Румянцева // Известия РАН. Серия физическая. – 2010. – Т. 74. – С. 1143-146.
189. Сагдаткиреева М.Б. Полосовая доменная структура в ферромагнетиках с наклонной анизотропией / М.Б. Сагдаткиреева // Известия РАН. Серия физическая. – 2003. – Т. 67. – С. 979-980.
190. Stevens K. Matrix Elements and Operator Equivalents Connected with the Magnetic Properties of Rare Earth Ions / K. Stevens // Proceedings of the Physical Society A. – 1952. – Vol. 65, № 3. – P. 209-215.
191. Вальков В.В. Унитарные преобразования группы U(N) и диагонализация многоуровневых гамильтонианов / В.В. Вальков // Теоретическая и Математическая Физика. – 1988. – Т. 76. – С. 143-152.
192. Fridman Yu.A. Influence of an inclined anisotropy on formation of spatially inhomogeneous phase in two-dimensional ferromagnet / Yu.A. Fridman, Ph.N. Klevets, D.V. Spirin // Physica Status Solidi (b). – 2004. – Vol. 241, № 5. – P. 1106-1114.
193. New Developments in Ferromagnetism Research : [сборник научных трудов / Editor V.N. Murray]. – New York : Nova Science Publishers, Inc., 2005 – 291 p.
194. Moriya T. Theory of Magnetism of NiF_2 / Tôru Moriya // Physical Review. – 1960. – Vol. 117. – P. 635-647.
195. Ivanov B.A. Effective field theory for S=1 quantum nematic / B.A. Ivanov, A.K. Kolezhuk // Physical Review B. – 2003. – Vol. 68. - 052401.
196. Ivanov B.A. Pairing of Solitons in Two-Dimensional S=1 Magnets / B.A. Ivanov, R.S. Khymyn, A.K. Kolezhuk // Physical Review Letters. – 2008. – Vol. 100. – 047203.

197. Bar'yakhtar V.G. Dynamics and relaxation in spin nematics / V.G. Bar'yakhtar, V.I. Butrim, A.K. Kolezhuk, and B.A. Ivanov // Physical Review B. – 2013. – Vol. 87. – 224407.

198. Toth T.A. Competition between two- and three-sublattice ordering for S=1spins on the square lattice / T.A. Toth, A.M. Launchli, F. Mila, and K. Penc // Physical Review B – 2012. – Vol. 85. – 140403.

199. Фридман Ю.А. Влияние «наклонной» анизотропии на спиновые состояния двумерной сильноанизотропной пленки / Ю.А. Фридман, Ф.Н. Клевец, Г.А. Гореликов // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 2012. – Т. 141. – С. 748-756.

200. Фридман Ю.А. Фазовые состояния двумерного легкоплоскостного магнетика с большой наклонной анизотропией / Ю.А. Фридман, Ф.Н. Клевец, Г.А. Гореликов, А.Г. Мелешко // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 2012. – Т. 142. – С. 1155-1163.

201. Klevets Ph.N. Tensor phase states in magnets with complex single-ion anisotropy / Ph.N. Klevets, Yu.A. Fridman, A.G. Meleshko – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015, – 71 p.

202. Барьяхтар В.Г. Критическая динамика при ферромагнитных фазовых переходах во внешнем поле / В.Г. Барьяхтар, И.М. Витебский, Н.М. Лавриненко, В.Л. Соболев // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики – 1986. – Т. 23. – С. 2664-2673.

203. Барьяхтар В.Г. Электронная структура и электронные свойства металлов и сплавов / В.Г. Барьяхтар, Е.А. Туров – К.: Наукова думка, 1988. – 39 с.

204. Fridman Yu.A. Influence of the mechanic boundary conditions on the dynamic and static properties of the ferromagnet with competing anisotropies / Yu.A. Fridman, G.A. Gorelikov, A.G. Meleshko, A.V. Krivtsova // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2014. – Vol. 361. – P. 50-56.

205. Фридман Ю.А. Динамические и стиатические свойства жестко закрепленной ультратонкой ферромагнитной пленки с S=1 и конкурирующими

анизотропиями / Г.А. Гореликов, А.Г. Мелешко, Ю.А. Фридман // Физика Низких Температур. – 2014. – Т. 40, № 5. - С. 545–559.
206. Chen H.H. Structural and Magnetic Phase Transitions in Rare-Earth Pnictides / H.H. Chen, P.M. Levy // Physical Review B. – 1973. – Vol. 7. – P. 4267-4284.
207. Fridman Yu.A. Phase states of an S=1 magnet with anisotropic exchange interactions / Yu.A. Fridman, O.A. Kosmachev, Ph.N. Klevets // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2008. – Vol. 320. – P. 435-449.
208. Фридман Ю.А. Сверхтверда магнитная фаза в двумерном изингоподобном антиферромагнетике с большой одноионной анизотропией / А.Г. Мелешко, Ф.Н. Клевец, Г.А. Гореликов, О.А. Космачев, Ю.А. Фридман // Физика Твердого Тела. – 2017. – Т. 59, № 9. – С. 1716-1723.